MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT BERLIN

I. SCHUR BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN

LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

22. BAND 1./2. HEFT

(AUSGEGEBEN AM 21. JANUAR 1925)

BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1925

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, deren vier zu einem Bande vereinigt werden sollen.

Jährlich sollen drei Bände herausgegeben werden. Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

K. Knopp, Königsberg, Bergplatz 6,
L. Lichtenstein, Leipzig, Talstraße 35, Mathematisches Institut,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

---

22. Band. **Inhalt:** 1./2. Heft.

Seite

Fekete, M., Über Gebiete, in denen komplexe Polynome jeden Wert zwischen zwei gegebenen annehmen 1
Haupt, O., Über zerlegbare Kurven 8
Ikeda, Y., Eine Integrationsmethode der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung 16
Liebmann, H., Hilberts Beweise der Sätze über Flächen festen Gaußschen Krümmungsmaßes 26
Bieberbach, L., Über die asymptotischen Werte der ganzen Funktionen endlicher Ordnung 34
Radó, T., und Fr. Riesz, Über die erste Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$ 41
Levi, Fr., Streckenkomplexe auf Flächen. (Zweite Mitteilung.) 45
Hartogs, F., Beweis des Jordanschen Kurvensatzes 62
Knopp, K., Mehrfach monotone Zahlenfolgen 75
Schur, Fr., Über die Erzeugung der Flächen 2. Grades durch korrelative Bündel 86
Schmidt, R., Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen 89

Über Gebiete, in denen komplexe Polynome jeden Wert zwischen zwei gegebenen annehmen.

Von

M. Fekete in Budapest.

1. In meiner Note[1]) „Über Zwischenwerte bei komplexen Polynomen" habe ich den Fundamentalsatz über stetige Funktionen $f(x)$ der reellen Veränderlichen x — laut welchem diese jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ mindestens einmal annehmen — auf komplexe Polynome übertragen, indem ich bewies:

Ist $P(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n$ $(n \geqq 2)$ *irgendein Polynom n-ten Grades mit beliebigen komplexen Koeffizienten, so nimmt es jeden Wert* γ, *der „zwischen* $P(a) = \alpha$ *und* $P(b) = \beta$ $(\alpha \neq \beta)$ *liegt", in einem Kreise* $K = K(a, b; n)$ *an, der um den Punkt* $x = \frac{a+b}{2}$ *als Mittelpunkt mit dem Radius* $\frac{|b-a|}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$ *geschlagen wird.* Hierbei bezeichnet die Ausdrucksweise „γ *liegt zwischen* α *und* β" den Umstand, daß γ ein Punkt der *geradlinigen* Strecke $\overline{\alpha\beta}$ ist.

Ich gewann dieses Ergebnis mit Hilfe eines Satzes von Herrn Grace[2]), aus dem geschlossen werden konnte, daß $P(x)$ die genannten Zwischenwerte in jedem Kreise mindestens einmal annimmt, welcher das Kreisbogendreieck $\mathsf{K} = \mathsf{K}(a, b; n)$, gebildet durch die beiden Kreisbogen, aus deren Punkten die gemeinsame Sehne $\overline{ab}$ unter einem Winkel $= \frac{\pi}{n}$ zu sehen ist,

[1]) Acta litt. ac scient. reg. univ. hung. Franc.-Jos., Sectio scient. math. **1** (1923), p. 98–100.

[2]) J. H. Grace, The zeros of a polynomial, Proc. of the Cambridge Phil. Soc. **11** (1900–1902), p. 352–357. Vgl. auch Szegö, Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen, Math. Zeitschr. **13** (1922), p. 28–55; Egerváry, Egy a symmetrikus, multilinearis formára vonatkozó minimum feladat, Math. és phys. lapok **29** (1922), p. 21–43; Egerváry, On a maximum-minimum problem and its connexion with the roots of equations, Acta litt. ac scient. reg. univ. hung. Franc.-Jos., Sectio scient. math. **1** (1922), p. 39–45.

in sich enthält. Der oben definierte Kreis K hat offenbar den kleinsten Radius unter sämtlichen Kreisen, welche K enthalten; ich bewies: *er bildet zugleich das kleinste Kreisgebiet*[3]*, in welchem alle Polynome $P(x)$ n-ten Grades die Werte zwischen $P(a)$ und $P(b)$ erreichen.*

2. Der Hauptzweck der vorliegenden Note ist zu zeigen, daß bereits das Kreiszweieck K mindestens eine von den n γ-Stellen des Polynoms $P(x)$ enthält, sobald γ zwischen $P(a)=\alpha$ und $P(b)=\beta$ liegt. Ich gelange zu dieser Verschärfung meines früheren Resultates, ohne Zuhilfenahme des Graceschen Satzes, auf einem vollständig elementaren, höchst einfachen Wege.

Da mein Beweisverfahren auch zu einer Übertragung des Rolleschen Theorems auf komplexe Polynome geeignet ist, so will ich mir die Herleitung dieser Übertragung als zweites Ziel setzen.

Endlich benutze ich dasselbe Verfahren zur Bestimmung von Kreisgebieten, welche mindestens je eine Nullstelle sämtlicher Polynome aus gewissen Polynomscharen enthalten.

3. Das oben angedeutete Ergebnis über die Zwischenwerte von Polynomen kann in folgendem Satze formuliert werden:

I. *Ein Polynom $P(x)=p_0+p_1x+\ldots+p_nx^n$ $(n\geqq 2)$ von n-tem Grade nehme für $x=a$ und $x=b$ die nicht gleichen Werte α und β an. Dann nimmt es jeden, zwischen α und β liegenden Wert γ im Innern oder am Rande des Kreiszweiecks* K *an, aus dessen Randpunkten die Strecke $\overline{ab}$ unter einem Winkel $=\frac{\pi}{n}$ zu sehen ist.*

Um diesen Satz zu beweisen, beachte man zunächst, daß jedes zwischen $\alpha=P(a)$ und $\beta=P(b)$ liegende γ sich in der Form

$$\gamma=\lambda P(a)+\mu P(b) \tag{1}$$

darstellen läßt, wobei

$$0<\lambda<1,\quad 0<\mu<1,\quad \lambda+\mu=1 \tag{2}$$

ist. Nach (2) ist (1) gleichbedeutend mit

$$\lambda[P(a)-\gamma]+\mu[P(b)-\gamma]=0. \tag{3}$$

Dieser Relation zufolge befriedigen die Wurzeln $\xi_1,\ldots,\xi_n$ der Gleichung $P(x)=\gamma$ die Beziehung

$$\lambda(a-\xi_1)\ldots(a-\xi_n)+\mu(b-\xi_1)\ldots(b-\xi_n)=0, \tag{4}$$

daher muß mindestens eine von diesen Wurzeln in K fallen. Sonst wäre

[3]) Vgl. a. a. O. [1]). NB.! K ist das *kleinste* Kreisgebiet unter sämtlichen von der oben charakterisierten Art *in Bezug auf den Radius*, doch nicht in dem Sinne, daß es in jedem dieser Kreisgebiete enthalten wäre.

nämlich die Strecke $\overline{ab}$ aus jeder dieser Wurzeln unter einem Winkel $< \frac{\pi}{n}$ zu sehen, d. h. für jedes ξ_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ wäre

$$-\frac{\pi}{n} < \operatorname{Arg}\left(\frac{a-\xi_\nu}{b-\xi_\nu}\right) < \frac{\pi}{n};$$

dann könnte aber das Produkt

$$\frac{a-\xi_1}{b-\xi_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a-\xi_n}{b-\xi_n}$$

nicht negativ ausfallen, wie es nach (2) und (4) sein muß.

4. Nun will ich die folgende Ergänzung des eben bewiesenen Satzes herleiten:

II. *Sei $a \neq b$, sonst beliebig und $n \geqq 2$. Dann ist das oben erklärte Kreiszweieck* K *das „kleinste" unter allen einfach zusammenhängenden Gebieten, in welchen alle Polynome $P(x)$ n-ten Grades jeden Wert zwischen $P(a)$ und $P(b)$ mindestens je einmal annehmen: es ist in sämtlichen Gebieten von der charakterisierten Art enthalten.*

In der Tat, ist $c \neq a$, $\neq b$ irgendein bestimmter Randpunkt von K, so gibt es offenbar unter den der Bedingung (2) genügenden Wertepaaren λ, μ ein solches, für welches

$$\lambda (a-c)^n + \mu (b-c)^n = 0 \tag{5}$$

ist. Setzt man also $P(x) = (x-c)^n$, so liegt die Zahl 0 nach (5) zwischen $P(a)$ und $P(b)$ und wird von $P(x)$ an der einzigen Stelle $x = c$ angenommen. Daher muß der Rand von K (und also auch sein Inneres) in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet mit den angegebenen Eigenschaften enthalten sein. W. z. b. w.[4])

5. Ich schließe meine Betrachtungen über die Zwischenwerte mit folgender Bemerkung:

Sei $\alpha \neq \beta$, sonst beliebig und γ irgendein Wert, der zwischen α und β liegt. Das Polynom $P(x)$ n-ten Grades nehme den Wert α bzw. β; γ an den Stellen $a_1, \ldots, a_n$ bzw. $b_1, \ldots, b_n$; $c_1, \ldots, c_n$ an. Hierbei seien die α- bzw. β-, γ-Stellen in irgendeiner Reihenfolge hingeschrieben, doch jede so oft, als ihre Multiplizität angibt. Konstruiert man die n Kreiszweiecke $\mathsf{K}(a_1, b_1; n), \ldots, \mathsf{K}(a_n, b_n; n)$, so enthält — nach I — jeder von ihnen mindestens eine der Stellen $c_1, \ldots, c_n$. Umgekehrt: *jede dieser Stellen fällt in eines der oben definierten Kreiszweiecke.*

---

[4]) Herr J. v. Neumann hat das von mir vermutete weitergehende Ergebnis bewiesen, daß auch kein mehrfach-zusammenhängendes Gebiet, welches aus K durch Hinweglassen irgendeines seiner inneren Punkte entsteht, die fragliche Eigenschaft des ursprünglichen Gebietes K aufweisen kann.

Denn ist c irgendeine γ-Stelle von $P(x)$, so genügt sie offenbar der Bedingung $\lambda[P(c)-\alpha]+\mu[P(c)-\beta]=0$, wobei λ und μ die Bedingungen (2) befriedigen. Doch kann

$$\frac{P(c)-\alpha}{P(c)-\beta}=\frac{c-a_1}{c-b_1}\cdot\ldots\cdot\frac{c-a_n}{c-b_n}$$

nicht negativ ausfallen, es sei denn, daß mindestens eines der genannten Zweiecke c enthält.

6. Nun will ich mein zweites Problem, nämlich die Frage nach der Lage der Nullstellen bei den Derivierten von Polynomen, welche an zwei vorgeschriebenen Stellen a, b gleiche Werte annehmen, mit Hilfe des oben angewendeten Beweisverfahrens auseinandersetzen. Diese Frage ist offenbar äquivalent mit der folgenden: Das Polynom $P(x)$ n-ten Grades befriedige die Bedingung

$$\int_a^b P(x)\,dx=0; \tag{6}$$

wie sind dann seine Nullstellen verteilt?

Man verdankt eine Lösung dieser Frage den Herren Grace und Heawood[5]). Sie lautet wie folgt:

Ist (6) *erfüllt, so verschwindet das Polynom* $P(x)$ *n-ten Grades innerhalb oder am Rande des Kreises, der um den Punkt* $x=\frac{a+b}{2}$ *als Mittelpunkt mit dem Radius* $\frac{|b-a|}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n+1}$ *geschlagen wird.*

Ich stelle dieser Lösung die folgende zur Seite:

III. *Ist* (6) *erfüllt, so verschwindet das nichtlineare*[6]) *Polynom* $P(x)$ *n-ten Grades im Innern oder am Rande des Kreiszweiecks* $\mathsf{K}=\mathsf{K}(a,b;n)$, *aus dessen Randpunkten die Strecke* $\overline{ab}$ *unter einem Winkel* $=\frac{\pi}{n}$ *zu sehen ist.*

Beim Beweise beschränke ich mich einfachheitshalber auf den Spezialfall, wo $b=-a=1$ ist. Dann hat (6) die Form

$$\int_{-1}^{+1} P(x)\,dx=0, \tag{7}$$

wobei ich als Integrationsweg die Strecke $\overline{-1,1}$ wähle.

Nun kann aus dem Bestehen von (7) die Existenz einer Nullstelle von $P(x)$ im angegebenen Bereich etwa so gefolgert werden:

---

[5]) Vgl. Grace, a. a. O. [2]); P. J. Heawood, Geometrical relations between the roots of $f(x)=0$, $f'(x)=0$. Quart. Journal of Math. **38** (1907), p. 84–107. Vgl. auch Szegö, a. a. O. [2]), S. 39.

[6]) Ist $P(x)$ ein lineares Polynom, so verschwindet es im Punkte $x=\frac{a+b}{2}$.

Man betrachte die Annäherungssummen

$$(8)\quad \sigma_k = P(x_0)(x_1 - x_0) + P(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + P(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \qquad (k = 2, 3, \ldots)$$

des Integrals in (7), gebildet mit Hilfe der Punkte

$$(9)\quad x_\nu = -1 + \frac{2\nu}{k} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k-1),$$

welche das Intervall von $x_0 = -1$ bis $x_k = 1$ in k gleiche Strecken einteilen. Nach (7) konvergieren diese Summen mit unbegrenzt wachsendem k gegen 0. Ist also gezeigt, daß die Gleichung

$$(10)\quad P(x) = \frac{\sigma_k}{2}$$

für jedes $k \geqq 2$ mindestens eine Wurzel in dem abgeschlossenen Kreiszweiecke $\mathsf{K}(-1, 1; n)$ besitzt, so folgt daraus wegen Stetigkeitsgründen, daß daselbst auch die Gleichung $P(x) = 0$ eine Wurzel besitzt. Doch ist (8) nach (9) mit der Relation

$$\left[P(x_0) - \frac{\sigma_k}{2}\right] + \left[P(x_1) - \frac{\sigma_k}{2}\right] + \ldots + \left[P(x_{k-1}) - \frac{\sigma_k}{2}\right] = 0$$

äquivalent, diese aber, durch Einführung der Wurzeln $\xi_1, \ldots, \xi_n$ von (10) in die Form

$$(11)\quad (x_0 - \xi_1)\ldots(x_0 - \xi_n) + (x_1 - \xi_1)\ldots(x_1 - \xi_n) + \ldots + (x_{k-1} - \xi_1)\ldots(x_{k-1} - \xi_n) = 0$$

umgestaltet, ergibt sofort, daß mindestens eine Wurzel von (10) im Innern von $\mathsf{K}(-1, 1; n)$ liegt, wie auch $k \geqq 2$ gewählt ist.

Wäre nämlich die Strecke $\overline{-1, 1}$ aus jeder Wurzel ξ_ν unter einem Winkel $\leqq \frac{\pi}{n}$ zu sehen, d. h. würde für jedes ξ_ν eine der beiden Beziehungen

$$(12)\quad 0 \leqq \operatorname{Arg}\left(\frac{\xi_\nu + 1}{\xi_\nu - 1}\right) \leqq \frac{\pi}{n},$$

$$(13)\quad 0 \leqq \operatorname{Arg}\left(\frac{\xi_\nu - 1}{\xi_\nu + 1}\right) \leqq \frac{\pi}{n}$$

bestehen, so würde die Summe

$$\frac{(x_0 - \xi_1)\ldots(x_0 - \xi_p)}{(x_{k-1} - \xi_1)\ldots(x_{k-1} - \xi_p)} + \frac{(x_1 - \xi_1)\ldots(x_1 - \xi_p)(x_1 - \xi_{p+1})\ldots(x_1 - \xi_n)}{(x_{k-1} - \xi_1)\ldots(x_{k-1} - \xi_p)(x_0 - \xi_{p+1})\ldots(x_0 - \xi_n)} + \ldots + \frac{(x_{k-1} - \xi_{p+1})\ldots(x_{k-1} - \xi_n)}{(x_0 - \xi_{p+1})\ldots(x_0 - \xi_n)}$$

— wobei $\xi_1, \ldots, \xi_p$ die der Bedingung (12), $\xi_{p+1}, \ldots, \xi_n$ aber die der Bedingung (13) genügenden Wurzeln von (10) bezeichnen — offenbar aus lauter solchen Gliedern bestehen, deren Argumente zwischen 0 und π liegen. Deshalb wäre diese Summe von 0 verschieden, im Widerspruche zu (11).

Damit ist Satz III für den gewünschten speziellen Fall vollständig begründet; seine allgemeine Gültigkeit folgt daraus durch Koordinatentransformation.

7. Der eben bewiesene Satz, sowie das oben angeführte Resultat der Herren Grace und Heawood stellen fest, daß mit Hilfe zweier vorgeschriebener Nullstellen und des Grades eines Polynoms sich Gebiete angeben lassen, wo die Derivierte des Polynoms mindestens einmal verschwinden muß, wie auch die übrigen Nullstellen des ursprünglichen Polynoms ausfallen mögen. Als eine Verallgemeinerung dieser Tatsache will ich folgendes zeigen:

IV. *Es seien* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *voneinander verschiedene, sonst beliebige komplexe Größen,* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *aber irgendwelche positive*[7]) *Zahlen* ($n \geqq 2$). *Dann verschwindet das Polynom n-ten Grades*

$$P(x) = \lambda_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + \tag{14}$$
$$+\lambda_1(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)+\ldots+\lambda_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$
$$=(x-x_0)\ldots(x-x_n)\sum_0^n \frac{\lambda_\nu}{x-x_\nu}$$

mindestens einmal in einem um den Punkt $x = \frac{x_0+x_1}{2}$ *als Mittelpunkt geschlagenen Kreise* $K = K(x_0, x_1; n)$, *dessen Halbmesser nur von* $|x_0 - x_1|$ *und dem Grade von* $P(x)$ *abhängt.*

Beim Beweise stütze ich mich auf die folgenden beiden Hilfssätze:

A. Enthält ein Kreis die Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_n$, so enthält er sämtliche Nullstellen von $P(x)$, wie auch in (14) die positiven Zahlen $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ gewählt sind.

B. Enthält ein Kreis K vom Radius R die Punkte $x_0, \ldots, x_k$, wo $k \geqq 1$ und $< n$ ist, so enthält der konzentrische Kreis K' vom Radius $R' = R \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8n}$ außer den Punkten von $x_0, \ldots, x_k$ entweder noch einen weiteren Punkt x_s ($s \geqq k+1$) oder aber mindestens eine Nullstelle von $P(x)$, wie auch in (14) die positiven Zahlen $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ gewählt sind.

Die Richtigkeit des Hilfsatzes A folgt aus der bekannten Tatsache, daß, unter den für die λ_ν angegebenen Voraussetzungen, bereits das kleinste konvexe Polygon, welches die Punkte $x_0, \ldots, x_n$ enthält, sämtliche Nullstellen von $P(x)$ enthalten muß.

Den Hilfssatz B beweise ich folgendermaßen: Aus der Definitionsgleichung (14) folgt

$$P(x_0) = \lambda_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_k)(x_0-x_{k+1})\ldots(x_0-x_n), \ldots,$$
$$P(x_k) = \lambda_k(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n).$$

[7]) Satz IV bleibt auch dann richtig, wenn einige von den Zahlen λ verschwinden.

Daher ist

$$\lambda_0 \frac{(x_0-x_{k+1})\dots(x_0-x_n)}{P(x_0)}+\dots+\lambda_k\frac{(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}{P(x_k)}$$
$$=\frac{1}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_k)}+\dots+\frac{1}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})}.$$

Doch ist die rechtsstehende Summe für voneinander verschiedene x_ν identisch gleich 0, also besteht die für unsere Zwecke grundlegende Relation

$$(15)\quad \lambda_0\frac{(x_0-x_{k+1})\dots(x_0-x_n)}{(x_0-\xi_1)(x_0-\xi_2)\dots(x_0-\xi_n)}+\dots+\lambda_k\frac{(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}{(x_k-\xi_1)(x_k-\xi_2)\dots(x_k-\xi_n)}=0,$$

wobei $\xi_1, \dots, \xi_n$ die Nullstellen von $P(x)$ bedeuten. Aus dieser Relation folgt durch ähnliche Schlüsse wie oben, daß $x_{k+1}, \dots, x_n$ und sämtliche ξ_ν nicht gleichzeitig außerhalb eines Kreises wie K' liegen können, aus dessen Randpunkten der die Punkte $x_0, \dots, x_k$ enthaltende Kreis K unter einem Winkel $\leqq \frac{\pi}{4n}$ zu sehen ist.

Sonst würden nämlich die Ungleichungen

$$-\frac{\pi}{4n}<\operatorname{Arg}\left(\frac{x_s-x_i}{x_0-x_i}\right)<\frac{\pi}{4n},\qquad -\frac{\pi}{4n}<\operatorname{Arg}\left(\frac{x_0-\xi_j}{x_s-\xi_j}\right)<\frac{\pi}{4n}$$
$$(s=1,\dots,k;\ i=k+1,\dots,n;\ j=1,\dots,n)$$

bestehen, also könnte die Summe

$$\sum_{s=1}^{k}{}'\lambda_s\frac{(x_s-x_{k+1})\dots(x_s-x_n)}{(x_0-x_{k+1})\dots(x_0-x_n)}\cdot\frac{(x_0-\xi_1)\dots(x_0-\xi_n)}{(x_s-\xi_1)\dots(x_s-\xi_n)}$$

keinesfalls negativ sein, wie das nach (15) sein müßte. Damit ist B bewiesen.

Aus den beiden Hilfsätzen A und B folgt nun Satz IV auf folgende Weise: Sei $K_1, K_2, \dots, K_{n-2}, K_{n-1}$ eine Folge konzentrischer Kreise, deren erster die Strecke $\overline{x_0 x_1}$ als Durchmesser besitzt und deren zweiter, dritter, ... aus dem Vorangehenden durch eine Vergrößerung des Halbmessers in dem Verhältnis $1:\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8n}$ hervorgeht. Dann verschwindet das Polynom $P(x)$ in einem dieser Kreise.

Denn ist $P(x)$ innerhalb und am Rande des Kreises K_{n-2} und daher jedes vorangehenden von Null verschieden, so müssen die Kreise $K_1, K_2, \dots, K_{n-2}$ nach den Hilfssätzen A und B der Reihe nach genau $2, 3, \dots, n-1$ Punkte des Punktsystems $x_0, \dots, x_n$ enthalten, also muß der letzte Kreis K_{n-1}, je nachdem er den letzten Punkt dieses Systems einschließt oder ausschließt, laut A bzw. B sämtliche Nullstellen von $P(x)$ bzw. mindestens eine von ihnen enthalten. W. z. b. w.

Budapest, März 1923.

(Eingegangen am 28. März 1923.)

Über zerlegbare Kurven.

Von

Otto Haupt in Erlangen.

I.

1. Ein (ebener) Jordanbogen $\mathfrak{A}^{(r)}$ heiße von der (beschränkten) „*Relativordnung* r“ $(r \geqq 1)$ bezüglich eines (Halbstrahlen- bzw. Parallelen-) Büschels B, wenn er folgende Eigenschaft besitzt: $\mathfrak{A}^{(r)}$ hat mit jedem „Projektionsstrahl“ (d. h. mit jedem Halbstrahl bzw. mit jeder Parallelen von B) höchstens r verschiedene Punkte oder Strecken („verlängerte Punkte“) gemeinsam und mit mindestens einem Strahl auch genau r; im Falle das Büschelzentrum Z auf $\mathfrak{A}^{(r)}$ liegt, wird Z (im allgemeinen) nicht als gemeinsamer Punkt von Projektionsstrahl und Bogen mitgezählt. Ist $r = 1$, so heiße der Bogen auch „(relativ) *einfach* bezüglich B“.[1])

2. Bei Benutzung dieser Ausdrucksweise gilt folgendes[2]):

Satz I. *Jeder Bogen von der Relativordnung* 2 *ist in endlich viele relativ einfache Bogen zerlegbar. Hingegen gibt es Bogen von der Relativordnung* 3, *die sich auf keine Weise in endlich viele, relativ einfache Bogen zerlegen lassen; insbesondere gibt es derartige Bogen, welche von* (*genau*) 6. *Ordnung sind*[3]).

Diese letzteren Beispiele leisten in gewissem Sinne das Äußerste. Denn es besteht der

Satz II. *Ein Bogen von der Relativordnung* $r = 3$, *der nicht in endlich viele Bogen von niedrigerer Relativordnung, d. h. also in relativ ein-*

[1]) Über den Begriff der Relativordnung usw. siehe: „Über Kurven endlicher Ordnung“ (Math. Zeitschr. 19 (1923), S. 284–299). Im folgenden zitiert mit A.

[2]) Die nachstehend im Texte aufgeführten Sätze I mit III sind gleichbedeutend mit den in A., Nr. 4, aufgestellten Sätzen I und II. Die oben gegebene Formulierung ist in Rücksicht auf das Folgende gewählt.

[3]) A., Nr. 20.

fache Bogen, zerlegbar ist, muß mindestens von der Ordnung $2r = 6$ *sein (falls er überhaupt von beschränkter Ordnung ist).*

Das folgt aus dem

Satz III. *Ein Bogen von der Ordnung* m $(2 \leqq m \leqq 5)$ *ist immer in endlich viele, relativ einfache Bogen zerlegbar.*

3. Die eben genannten drei Sätze lassen sich auf Bogen beliebiger Relativordnung ausdehnen, was im folgenden gezeigt werden soll.

Zunächst verabreden wir folgende Bezeichnungen: Ein Jordanbogen $\mathfrak{A}$ heiße *„zerlegbar höchstens vom Relativgrade* R*“* $(R \geqq 1)$, wenn $\mathfrak{A}$ sich als Aggregat von endlich vielen Bogen $\mathfrak{A}_\nu^{(\varrho_\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ darstellen läßt, wobei $\mathfrak{A}_\nu^{(\varrho_\nu)}$ ein Bogen von der Relativordnung ϱ_ν $(1 \leqq \varrho_\nu \leqq R)$ sein soll bezüglich eines (passend gewählten) Büschels B_ν. Ist für mindestens ein ν die Gleichung $\varrho_\nu = R$ erfüllt, so heißt $\mathfrak{A}$ *„zerlegbar genau vom Relativgrade* R*“*.

Entsprechend heißt der Bogen $\mathfrak{A}$ *„unzerlegbar vom Relativgrade* N*“* $(N \geqq 2)$, wenn für *jede* beliebige natürliche Zahl $n \geqq 1$, für *jede* Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in n Teilbogen $\mathfrak{A}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ und für *jede* mögliche Wahl von Bezugsbüscheln B_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ immer mindestens einer der Teilbogen, z. B. $\mathfrak{A}_1$, von der Relativordnung $\varrho_1 \geqq N + 1$ ist bezüglich B_1; vorausgesetzt war dabei, daß überhaupt einer der Bogen von beschränkter Relativordnung ist.

4. Die in Aussicht genommene Verallgemeinerung der Sätze der Nr. 2, deren Beweis[4]) in Nr. 7 mit 12 gegeben wird, lautet nun:

Satz I. *Jeder Bogen* $\mathfrak{A}^{(2k)}$ *von der Relativordnung* $r = 2k$ $(k \geqq 1)$ *ist zerlegbar höchstens vom Relativgrade* $2k - 1$ (Nr. 7).

Beispiele werden zeigen, daß *der Relativgrad* $2k - 1$ *des Satzes durch keinen niedrigeren ersetzt werden kann*, d. h. daß es Bogen $\mathfrak{A}^{(2k)}$ gibt, die unzerlegbar sind vom Relativgrad $2k - 2$ (Nr. 8).

Satz II. *Ein vom Relativgrad* $2k$ $(k \geqq 1)$ *unzerlegbarer Bogen* $\mathfrak{A}$ *ist mindestens von der Ordnung* $n = 2(2k + 1)$, *falls* $\mathfrak{A}$ *überhaupt von beschränkter Ordnung ist* (Nr. 9).

Wir zeigen überdies durch *Beispiele*, daß *diese Minimalordnung* $2(2k + 1)$ *wirklich auftritt* (Nr. 10).

Satz III. *Ein Bogen von der Ordnung* m $(6 \leqq m)$ *ist immer zerlegbar höchstens vom Relativgrade* $1 + G\left(\frac{m-2}{2}\right)$. *Dabei bedeutet* $G\left(\frac{m-2}{2}\right)$ *die größte gerade Zahl* $2k$, *für welche* $2k \leqq \frac{m-2}{2}$ *ist* $(6 \leqq m)$ (Nr. 11).

---

[4]) Sie liefern zugleich neue Beweise der Sätze I und II in A., Nr. 4.

Beispiele werden zeigen, daß auch hier *die Gradzahl* $1+G\left(\frac{m-2}{2}\right)$ *die genaue Schranke* liefert, d. h. daß es Bogen der Ordnung m gibt, die unzerlegbar sind vom Relativgrad $G\left(\frac{m-2}{2}\right)$ (Nr. 12).

5. Alle vorausgehenden Bemerkungen beziehen sich auf *Jordan*sche Bogen (und Kurven), d. h. auf die umkehrbar eindeutigen und stetigen (beschränkten) Bilder einer abgeschlossenen Strecke (bzw. einer Kreisperipherie) in der euklidischen Ebene.

Wir weisen hier nur hin auf die naheliegende *Ausdehnung der obigen Sätze*, einmal *auf solche Bogen und Kurven, die unendlich ferne Punkte* (in der projektiven Ebene) *enthalten*, sodann auf Kurven und Bogen, die *vielfache Punkte* aufweisen[5]). In beiden Fällen käme es lediglich darauf an, die benutzten Begriffe der Ordnung, Relativordnung usw. in geeigneter Weise auf die zu betrachtende allgemeinere Kategorie von Bogen und Kurven zu übertragen. Insbesondere wird man z. B. festsetzen, daß für die Bestimmung der Ordnung eines Bogens jeder Punkt so oft in Anschlag zu bringen ist, als seine Vielfachheit beträgt, usw.

II.

6. Hilfssatz. Damit ein Bogen $\mathfrak{A}$ zerlegbar sei höchstens vom Relativgrade R $(1 \leqq R)$, ist notwendig und hinreichend: Zu jedem inneren[6]) (bzw. End-[6])) Punkte des Bogens $\mathfrak{A}$ gehört auf $\mathfrak{A}$ eine (hinreichend kleine) Umgebung $\mathfrak{U}^+$ sowohl als $\mathfrak{U}^-$ (bzw. eine einseitige Umgebung[6])), welche ebenfalls zerlegbar ist höchstens vom Relativgrad R.

Die Bedingung ist notwendig, weil mit $\mathfrak{A}$ auch jeder seiner Teilbogen zerlegbar ist. Daß sie hinreicht, folgt aus dem Heine-Borelschen Überdeckungssatze.

Aus dem Hilfssatze ergibt sich: $\mathfrak{A}$ ist unzerlegbar vom Relativgrade N dann und nur dann, wenn für mindestens einen seiner Punkte P_0 relativ zu *jedem* Büschel B eine beliebig kleine Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{A}$ von der Relativordnung $r \geqq N+1$ ist.

7. Zum Beweise von Satz I zeigen wir, daß jeder Bogen $\mathfrak{A}^{(2k)}$, welcher bezüglich eines Büschels B die Relativordnung $r = 2k$ besitzt, zerlegbar ist in endlich viele Bogen $\mathfrak{A}_\nu^{r_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ von den Relativordnungen $r_\nu \leqq 2k-1$ bezüglich B. Dem Hilfssatze der Nr. 6 zufolge genügt der Nachweis, daß jede (hinreichend kleine) einseitige Umgebung jedes beliebigen Punktes P_0 von $\mathfrak{A}^{(2k)}$ zerlegbar ist.

---

[5]) Vgl. A. Rosenthal, Über die Singularitäten der reellen ebenen Kurven (Math. Ann. 73 (1913), S. 481 und 487).

[6]) Vgl. A., Nr. 9.

Es sei P_0 ein (innerer oder End-) Punkt von $\mathfrak{A}$. Wir setzen *zunächst* voraus, daß P_0 *nicht mit dem Zentrum* Z *des gegebenen Bezugsbüschels* B *zusammenfalle.*

Wir bezeichnen mit s_0 denjenigen Halbstrahl von B, welcher P_0 enthält, mit $\mathfrak{H}_0^+$ und $\mathfrak{H}_0^-$ die beiden offenen Halbebenen, welche durch diejenige Gerade bestimmt werden, auf der s_0 liegt. Wir schränken die zu betrachtende Umgebung $\mathfrak{U}_0^+$ von P_0 auf $\mathfrak{A}^{(2k)}$ so ein, daß sie ganz im Innern eines Kreises mit dem Mittelpunkte P_0 verläuft, welcher Z nicht enthält. Nun liegt P_0 auf s_0 isoliert, da $\mathfrak{A}^{(2k)}$ von beschränkter Relativordnung ist; folglich kann $\mathfrak{U}_0^+$ im Rahmen der bereits gemachten Beschränkungen so gewählt werden: $\mathfrak{U}_0^+$ gehört, abgesehen von P_0 selber, ganz z. B. zu $\mathfrak{H}_0^+$; oder, kurz gesagt, $\mathfrak{U}_0^+$ *liegt ganz „auf der einen Seite von* s_0". Schließlich können wir annehmen, daß $\mathfrak{U}_0^+$ keine Strecke ist; hingegen kann P_0 gewöhnlicher oder verlängerter Punkt von $\mathfrak{A}^{(2k)}$ auf s_0 sein.

Wäre nun keine, noch so kleine (in $\mathfrak{U}_0^+$ enthaltene) Umgebung $\mathfrak{U}^+$ von P_0 zerlegbar, so müßten in beliebig kleiner einseitiger Nachbarschaft von s_0 noch Halbstrahlen s_1 von B existieren, die von s_0 verschieden sind und genau $2k$ verschiedene Punkte von $\mathfrak{U}_0^+$ enthalten. Folglich könnte s_1 so gewählt werden, daß die beiden Endpunkte P_0 und P_1 von $\mathfrak{U}_0^+$ auf verschiedenen Seiten von s_1 liegen. Dann aber gibt es unter den $2k$ Punkten, die $\mathfrak{U}_0^+$ mit s_1 gemeinsam hat, eine ungerade Anzahl, etwa $\sigma = 2l + 1$, *Schnitt*punkte[7]); die übrigen $\tau = 2k - \sigma$ Punkte sind Stützpunkte auf s_1. Unter diesen gibt es λ Stützpunkte, deren Umgebungen auf $\mathfrak{A}^{(2k)}$, von den Stützpunkten selbst abgesehen, alle auf der nämlichen Seite von s_1 liegen; dabei ist $\lambda \geqq \frac{\tau+1}{2} = k - l$. Somit gibt es in passend gewählter, einseitiger Nachbarschaft von s_1 Strahlen s_2 von B, die mit $\mathfrak{U}_0^+$ im ganzen N' Punkte gemeinsam haben, wobei

$$N' \geqq \sigma + 2\lambda = 2(l + \lambda) + 1 > 2k;$$

denn in einer solchen Nachbarschaft lösen sich die λ, eben betrachteten, Stützpunkte in mindestens 2λ, untereinander und von den bereits vorhandenen σ Schnittpunkten verschiedene (Schnitt-) Punkte auf[8]). $N' > 2k$ steht aber im Widerspruch mit der Voraussetzung $N' \leqq 2k$.

Der *Fall, daß* Z *mit* P_0 *zusammenfällt*, läßt sich ähnlich erledigen; wieder kann dabei angenommen werden, daß die zu betrachtende Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{A}^{(2k)}$ keine Strecke ist.

Man benutzt die Tatsache, daß jeder Bogen, welcher von beschränkter Relativordnung bezüglich eines seiner Punkte, also z. B. bezüglich P_0 ist,

[7]) A., Nr. 13.
[8]) A., Nr. 16.

in P_0 beiderseits (bzw. nur auf einer Seite) nur eine einzige Halbtangente t_0^+ und t_0^- (bzw. t_0) besitzt, wenn P_0 innerer (bzw. End-) Punkt des Bogens ist[9]). Besitzt nämlich[9]) z. B. die Umgebung $\mathfrak{U}^+$ von P_0 auf $\mathfrak{A}^{(2k)}$ zwei verschiedene Halbtangenten in P_0, so existiert ein Winkelraum mit P_0 als Scheitel, dessen beide (voneinander verschiedene) Schenkel noch in beliebiger Nähe von P_0 Punkte mit $\mathfrak{U}^+$ gemeinsam haben, die von P_0 verschieden sind; diese Schenkel (Halbstrahlen durch P_0) hätten also mit $\mathfrak{U}^+$ unzählig viele Punkte gemeinsam gegen die Voraussetzung. Aus dieser Überlegung entnehmen wir überdies, daß eine genügend kleine einseitige Umgebung $\mathfrak{U}^+$ von P_0, abgesehen von P_0 selbst, ganz im Innern eines Winkelraumes verläuft, dessen Scheitel P_0, dessen einer Schenkel die entsprechende Halbtangente in P_0 und dessen Öffnungswinkel beliebig klein vorgegeben ist.

Jetzt können wir die früher angestellten Betrachtungen auf den vorliegenden Fall übertragen, in welchem P_0 mit Z zusammenfällt. Wir müssen uns dabei an die Festsetzung erinnern, daß P_0 bei den zur Bestimmung der Relativordnung dienenden Abzählungen nicht mit in Anschlag gebracht wird (Nr. 1). Der Beweis verläuft dann so: Man geht von der Annahme des Gegenteils aus und wählt einen Halbstrahl s_1 durch P_0, der im Innern eines geeignet gewählten Winkelraumes der oben erklärten Art verläuft und mit einem Teilbogen von $\mathfrak{U}^+$ genau $2k$ untereinander und von P_0 verschiedene Punkte gemeinsam hat, während gleichzeitig die beiden Endpunkte dieses Teilbogens auf verschiedenen Seiten von s_1 liegen. Daraus ergibt sich wie früher ein Widerspruch.

8. Aus dem Satz I entnehmen wir, daß für jeden Bogen $\mathfrak{A}^{(r)}$ der Relativordnung r $(3 \leqq r)$, welcher unzerlegbar ist vom Relativgrade $r-1$, gewiß r eine ungerade Zahl ist: $r = 2k+1$ $(k \geqq 1$. Es gibt derartig unzerlegbare Bogen für jedes $r = 2k+1$ $(k \geqq 1)$.

Für den Fall $k = 1$ wurde ein Beispiel bereits an anderer Stelle angegeben[10]). Unter Verwendung der damals benutzten Folge von Kreissegmenten σ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, welche den Punkt P_∞ der Kreisperipherie als Häufungspunkt besitzen, erhält man jetzt auch Beispiele für beliebiges k.

Für $k = 1$ hatten wir den Bogen $\mathfrak{B}_0$ definiert als Vereinigung von abzählbar unendlich vielen Bogen $\mathfrak{b}_\nu$. Dabei war $\mathfrak{b}_\nu$ dem Segmente σ_ν (bzw. dem Dreieck $P_\nu M_\nu P_{\nu+1}$) eingeschrieben und bezüglich des Punktes P_∞ von der Relativordnung 3; bezüglich jedes anderen Punktes waren fast alle $\mathfrak{b}_\nu$ mindestens von der Relativordnung 3 $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Demzufolge war dann die, von fast allen $\mathfrak{b}_\nu$ gebildete, Umgebung von P_∞ auf $\mathfrak{B}_0$ unzerlegbar vom Relativgrade 2.

---

[9]) Rosenthal, l. c. [6]), S. 516.

[10]) A., Nr. 20.

Für $k \geqq 2$ ist dementsprechend jedem σ_ν ein Bogen einzuschreiben, der bezüglich eines oder mehrerer (von ν unabhängiger) Punkte von der Relativordnung $2k+1$ ist, während bezüglich jedes anderen Punktes fast alle $\mathfrak{b}_\nu$ mindestens von der Relativordnung $2k+1$ sind. Mit Rücksicht auf später benötigte Beispiele soll die Konstruktion so eingerichtet werden, daß der verlangte Bogen $\mathfrak{B}_0$ gleichzeitig höchstens von der Ordnung $2(2k+1)$ ist. Dazu bemerke man: Jede Gerade, welche Punkte mit $\mathfrak{B}_0$ gemeinsam hat, kann nur Punkte von höchstens zwei verschiedenen Segmenten (abgesehen von den Punkten P_ν) enthalten, also z. B. von σ_μ und σ_ν. Eine solche Gerade trifft dann die beiden gleichschenkligen Dreiecke $P_\mu M_\mu P_{\mu+1}$ bzw. $P_\nu M_\nu P_{\nu+1}$ je in den Hypotenusen $\overline{P_\mu P_{\mu+1}}$ bzw. $\overline{P_\nu P_{\nu+1}}$ und in je einer weiteren Seite. Und jeder Bogen $\mathfrak{b}_\varkappa$ müßte die Eigenschaft haben, von jeder derartigen Geraden in höchstens $(2k+1)$ Punkten getroffen zu werden, von jeder anderen Geraden in höchstens $2(2k+1)$ Punkten.

Die folgende Konstruktion liefert einen Bogen $\mathfrak{b}_\nu$ der gewünschten Beschaffenheit; wir führen sie nur für $k=2$ durch, weil die Verallgemeinerung auf der Hand liegt. Wie im Falle $k=1$ konstruieren wir den Inkreis $\mathfrak{k}_\nu$ des Dreiecks $P_\nu M_\nu P_{\nu+1}$ mit dem Radius ϱ_ν und außerdem einen Kreis $\mathfrak{k}_\nu^*$ vom Radius $\varrho_\nu^* < \varrho_\nu$, welcher $\mathfrak{k}_\nu$ im Punkte Q_ν von innen berührt. Es soll etwa $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{\varrho_\nu^*}{\varrho_\nu} = 1$ sein. Die Vereinigung der Strecken $\overline{P_\nu S_\nu}$, $\overline{T_\nu P_{\nu+1}}$, des Bogens $\overset{\frown}{S_\nu Q_\nu T_\nu}$ von $\mathfrak{k}_\nu$ und der Peripherie von $\mathfrak{k}_\nu^*$ liefert bereits das verlangte $\mathfrak{b}_\nu$. Allerdings hat $\mathfrak{b}_\nu$ in Q_ν einen mehrfachen Punkt; indes kann dieser, ohne Preisgabe der für uns wesentlichen Eigenschaften von $\mathfrak{b}_\nu$, durch eine kleine Deformation bei Q_ν beseitigt werden.

Der so gewonnene Bogen $\mathfrak{B}_0$ ist von der Relativordnung $(2k+1)$ bezüglich des Punktes P_∞. Durch Hinzufügen eines passend gewählten Bogens, der relativ einfach ist bezüglich des fraglichen Büschels, erhält man einen Bogen der Relativordnung $2k+2$, der zerlegbar ist genau vom Relativgrade $2k+1$ und unzerlegbar vom Relativgrade $2k$.

9. Zum Beweise von Satz II können wir annehmen, daß der zu betrachtende Bogen $\mathfrak{A}$, welcher als unzerlegbar vom Relativgrade $r = 2k$ vorausgesetzt wird, gleichzeitig von beschränkter Ordnung n sei, so daß also alle Punkte, die $\mathfrak{A}$ mit irgendwelchen Geraden gemeinsam hat, insbesondere isoliert[11]) liegen. Zu zeigen ist: $n \geqq 2r+2 = 4k+2$.

Nach dem Hilfssatze (Nr. 6) existiert mindestens ein Punkt P_0 von $\mathfrak{A}$, dessen Umgebung $\mathfrak{U}$ ebenfalls unzerlegbar und folglich mindestens von der Relativordnung $r+1$ ist *bezüglich des Büschels* B_0 *mit dem Zentrum* P_0. Demgemäß sei s ein Halbstrahl von B_0, welcher mit $\mathfrak{U}$, außer P_0, noch

[11]) A., Nr. 10.

mindestens $r+1$ verschiedene Punkte: $P_1, P_2, \ldots, P_N$ $(N \geqq r+1)$ gemeinsam hat. Unter diesen N Punkten mögen sich im ganzen σ Schnittpunkte und τ Stützpunkte vorfinden: $N = \sigma + \tau$. Unter den Stützpunkten gibt es $\lambda \geqq E\left(\frac{\tau+1}{2}\right)$ [12], deren Umgebungen auf $\mathfrak{U}$, von den Stützpunkten selbst abgesehen, sämtlich auf der gleichen Seite von s liegen. Für einen zu s hinreichend benachbarten Halbstrahl s' von $\mathfrak{B}_0$ lösen sich diese λ Stützpunkte auf in mindestens 2λ (verschiedene) Schnittpunkte; s' *schneidet* also $\mathfrak{U}$ in mindestens $M = \sigma + 2\lambda \geqq N \geqq r+1$ Punkten $Q_1, \ldots, Q_M$, die untereinander und von P_0 verschieden sind.

Man bezeichne mit l_ν bzw. q_ν den (positiven) Abstand der Punkte P_0 und Q_ν $(\nu = 1, \ldots, M)$ bzw. der Punkte $Q_{\nu+1}$ und Q_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, M-1)$; ferner bedeute l die kleinste der (positiven) Zahlen $\frac{1}{4} l_M, \frac{1}{4} q_1, \ldots, \frac{1}{4} q_{M-1}$. Die Punkte Q_ν seien dabei so numeriert, daß

$$0 < l_M < l_{M-1} < \ldots < l_1.$$

Man wähle jetzt Q_1 als Zentrum eines Bezugsbüschels $\mathfrak{B}_1$. Betrachtet man nur solche Halbstrahlen von $\mathfrak{B}_1$, die zu einer *genügend kleinen* Nachbarschaft Σ_1 von s' gehören, so hat *jeder* Halbstrahl aus Σ_1 mit $\mathfrak{U}$ mindestens M voneinander verschiedene Schnittpunkte $Q_1', \ldots, Q_M'$ gemeinsam, wobei $Q_1 = Q_1'$ ist und überdies der Abstand des Punktes Q_ν' vom Punkte Q_ν kleiner als l bleibt $(\nu = 1, \ldots, M)$. Dann liegen aber die Punkte $Q_1', \ldots, Q_M'$ sämtlich außerhalb einer Umgebung $\mathfrak{U}_0$ von P_0 auf $\mathfrak{U}$, wobei $\mathfrak{U}_0$ ganz dem Innern des Kreises um P_0 mit dem Radius l angehört. Überdies kann und soll $\mathfrak{U}_0$ so gewählt werden, daß $\mathfrak{U}_0$ ganz von den Halbstrahlen aus Σ_1 überdeckt wird. Aber nach den über P_0 gemachten Annahmen muß jetzt auch $\mathfrak{U}_0$ mindestens von der Relativordnung $r+1$ sein bezüglich Σ_1, d. h. unter den Halbstrahlen von Σ_1 gibt es mindestens einen, der mit $\mathfrak{U}_0$ mindestens $(r+1)$ verschiedene Punkte $T_1, \ldots, T_L$ $(L \geqq r+1)$ gemeinsam hat. Auf diesem Halbstrahl liegen aber außerdem die Punkte $Q_1, Q_2', \ldots, Q_M'$ $(M \geqq r+1)$, also im ganzen mindestens $2(r+1)$ verschiedene Punkte von $\mathfrak{U}$, w. z. b. w.

10. Damit ist $2(r+1) = 4k+2$ als eine untere Schranke für die Ordnung eines, vom Relativgrade $r = 2k$ unzerlegbaren Bogens nachgewiesen. Daß $4k+2$ genauer das *Minimum* dieser Ordnung ist, ergibt sich jetzt aus dem in Nr. 8 angegebenen *Beispiel* eines derartig unzerlegbaren Bogens, dessen Ordnung höchstens und — zufolge Nr. 9 — also genau $4k+2$ beträgt.

11. Der Beweis von Satz III (Nr. 4) kann jetzt so geführt werden: Ist ein Bogen $\mathfrak{A}$ von der Ordnung m $(6 \leqq m)$ vorgelegt und ist die Um-

[12] $E\left(\frac{\tau+1}{2}\right)$ bedeutet die größte ganze Zahl, welche in $\frac{\tau+1}{2}$ enthalten ist.

gebung irgendeines seiner Punkte unzerlegbar vom Relativgrade $r = 2\varkappa$ ($\varkappa \geqq 1$), so hat diese Umgebung und somit auch $\mathfrak{A}$, nach Satz II, mindestens die Ordnung $4\varkappa + 2$. Also gilt $4\varkappa + 2 \leqq m$ oder $2\varkappa = r \leqq \frac{m-2}{2}$. Folglich ist r höchstens gleich $G\left(\frac{m-2}{2}\right)$.

12. Daß, bei beliebig vorgegebenem m, der *maximale Relativgrad* $G\left(\frac{m-2}{2}\right)$ wirklich erreicht werden kann, schließt man wieder aus dem *Beispiele* $\mathfrak{B}_0$ der Nr. 8. Zwar ist dort $m = 4k + 2$; aber durch Hinzufügen geeigneter Bogen gewinnt man aus $\mathfrak{B}_0$ auch Bogen bzw. von den Ordnungen $4k + 3$, $4(k+1)$, $4(k+1)+1$, welche unzerlegbar sind genau vom Relativgrad $2k$.

Erlangen, Math. Seminar, 22. September 1923.

(Eingegangen am 17. November 1923.)

Eine Integrationsmethode der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Von

Yoshiro Ikeda in Zürich.

In den meisten Fällen werden die Lösungen der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung als endliche oder unendliche Reihen dargestellt, die nach bekannten Funktionen fortschreiten. Wenn die bekannte Funktion auch die Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, so kann man die Ähnlichkeit auch in den Differentialgleichungen bemerken. Nehmen wir z. B. die Besselsche Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0$$

und ihre Lösung

$$J_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{\Gamma(n+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2} + \cdots.$$

Für kleines x geht die Lösung über in

$$J_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n \tag{1}$$

und die Gleichung in

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{n^2}{x^2}y = 0, \tag{2}$$

wovon (1) eine Lösung ist.

Wir können daher vermuten, daß die strenge Lösung von da aus durch sukzessive Approximationen zu gewinnen ist. In der Tat sind, wie ich an anderer Stelle bewies[1]), Funktionen, welche verschiedenen linearen Differentialgleichungen genügen, durch eine Volterrasche Integralgleichung miteinander verknüpft.

Ich will hier zeigen, wie die darauf sich gründende Methode vorteilhaft zur Lösung einiger Differentialgleichungen benutzt werden kann.

[1]) Tôhoku Journ. of Mathem., Jan. 1924.

Es handle sich um die Gleichung

$$u'' + P(\zeta)u' + Q(\zeta)u = 0. \tag{3}$$

Wir nehmen an, daß die Differentialgleichung

$$v'' + R(\zeta)v' + S(\zeta)v = 0 \tag{4}$$

an einer Stelle $\zeta = b$ der Gleichung (3) sehr ähnlich ist, und daß die Lösungen von (4) bekannt sind. Wir schreiben (3) in folgender Form:

$$u'' + R(\zeta)u' + S(\zeta)u = \{R(\zeta) - P(\zeta)\}u' + \{S(\zeta) - Q(\zeta)\}u,$$

multiplizieren die beiden Seiten mit

$$N(z, \zeta) = \frac{v_1(z)\,v_2(\zeta) - v_2(z)\,v_1(\zeta)}{v_1(\zeta)\,v_2'(\zeta) - v_1'(\zeta)\,v_2(\zeta)},$$

wo $v_1(\zeta)$, $v_2(\zeta)$ zwei unabhängige Lösungen von (4) sind, und integrieren von b bis z. Dann wird

$$v(z) = \alpha v_1(z) + \beta v_2(z) = u(z) + \int_b^z K(z, \zeta)u(\zeta)\,d\zeta, \tag{5}$$

wobei

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{u(b)\,v_2'(b) - u'(b)\,v_2(b) + \{R(b) - P(b)\}u(b)\,v_2(b)}{v_1(b)\,v_2'(b) - v_2(b)\,v_1'(b)}, \\ \beta = \dfrac{u'(b)\,v_1(b) - v_1'(b)\,u(b) + \{R(b) - P(b)\}u(b)\,v_1(b)}{v_1(b)\,v_2'(b) - v_2(b)\,v_1'(b)}, \end{cases} \tag{6}$$

$$K(z, \zeta) = N(z, \zeta)\{S(\zeta) - Q(\zeta)\} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\{N(z, \zeta)R((\zeta) - P(\zeta))\}. \tag{7}$$

Also gilt die Volterrasche Integralgleichung

$$u(z) = v(z) - \int_b^z K(z, \zeta)u(\zeta)\,d\zeta. \tag{8}$$

Setzt man

$$U_0 = v(z), \qquad U_n = \int_b^z K(z, \zeta)U_{n-1}(\zeta)\,d\zeta, \tag{9}$$

so ist deren Lösung

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n. \tag{10}$$

Die Reihe konvergiert, wenn der Kern $K(z, \zeta)$ beschränkt ist.

Einfache Fälle:

I. $R(b) = P(b)$, $\quad u_1(b) = v_1(b)$, $\quad u_1'(b) = v_1'(b)$,
$\quad\quad\quad

II. $$P(\zeta)=\frac{\alpha_0+\alpha_1(\zeta-b)+\cdots}{\zeta-b}, \qquad Q(\zeta)=\frac{\beta_0+\beta_1(\zeta-b)+\cdots}{(\zeta-b)^2}$$

$$R(\zeta)=\frac{\alpha_0}{\zeta-b}, \qquad S(\zeta)=\frac{\beta_0}{(\zeta-b)^2}.$$

Die Lösungen der Differentialgleichung (4) findet man durch den Ansatz $v(x)=x^\varrho$, wo $x=\zeta-b$ ist und ϱ der Gleichung genügt:

$$\varrho(\varrho-1)+\alpha_0\varrho+\beta_0=0. \tag{11}$$

ϱ_1 und ϱ_2 seien die Wurzeln von (11), in solcher Reihenfolge, daß $\Re(\varrho_1)\geqq\Re(\varrho_2)$ ist.

$$N(x,\xi)=\frac{x^{\varrho_1}\xi^{1-\varrho_1}-x^{\varrho_2}\xi^{1-\varrho_2}}{(\varrho_1-\varrho_2)}.$$

In der Nähe von $\zeta=b$ stimmt die Differentialgleichung (3) mit (4) überein. Es folgt aus (5) und (6), daß wir eine Lösung $u_1(x)$ aus der Integralgleichung

$$u_1(x)=v_1(x)-\int_0^x K(x,\xi)\,u_1(\xi)\,d\xi$$

gewinnen können. Durch sukzessive Approximationen bekommt man sie in der Gestalt

$$u_1(x)=x^{\varrho_1}\mathfrak{P}(x) \qquad (\mathfrak{P}=\text{Potenzreihe}). \tag{12}$$

Aber die zweite Lösung kann man nicht so berechnen wie die erste. Wir schreiben zunächst ε statt der unteren Grenze 0.

$$u_2(x)=\Big[v_2(x)\beta(\varepsilon)+\int_\varepsilon^x\Big\{\frac{S(\xi)-Q(\xi)}{\varrho_1-\varrho_2}\xi^{1-\varrho_2}-\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\frac{R(\xi)-P(\xi)}{\varrho_1-\varrho_2}\xi^{1-\varrho_2}\Big)\Big\}x^{\varrho_2}u_2(\xi)\,d\xi$$

$$+\Big[v_1(x)\alpha(\varepsilon)-\int_\varepsilon^x\Big\{\frac{S(\xi)-Q(\xi)}{\varrho_1-\varrho_2}\xi^{1-\varrho_1}-\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\frac{R(\xi)-P(\xi)}{\varrho_1-\varrho_2}\xi^{1-\varrho_1}\Big)\Big\}x^{\varrho_1}u_2(\xi)\,d\xi$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}[\text{erste Klammer}]=v_2(x)+\int^x\Big\{\frac{S-Q}{\varrho_1-\varrho_2}\xi^{1-\varrho_2}-\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\frac{R-P}{\varrho_1-\varrho_2}\xi^{1-\varrho_2}\Big)\Big\}x^{\varrho_2}u_2\,d\xi.$$

Setzt man die zweite Klammer $=f(\varepsilon)$ und differentiiert nach ε, so folgt aus (3) und (4), daß $\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}$ identisch verschwindet. Also ist

$$f(\varepsilon)=c\,v_1(x)-\int^x\Big\{\frac{S-Q}{\varrho_1-\varrho_2}\xi^{1-\varrho_1}-\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\frac{R-P}{\varrho_1-\varrho_2}\xi^{1-\varrho_1}\Big)\Big\}x^{\varrho_1}u_2\,d\xi.$$

Man kann $c=0$ setzen. Denn aus (12) ist klar, daß die Berücksichtigung der willkürlichen Konstanten c nur die Addition von $c\,u_1(x)$ in dem Resultat zur Folge hat.

Bei den sukzessiven Approximationen in dem Integral der zweiten Klammer tritt das Integral $\int_x^x \xi^{\varrho_2-\varrho_1+m}\,d\xi$ auf, wo m die positiven ganzen Zahlen durchläuft. Wenn $\varrho_2-\varrho_1+m=-1$ ist, wird das Integral $=\log x$. In den folgenden Approximationen müssen wir dann das Integral berechnen

$$\int x^n \log x\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Indem wir mit (12) vergleichen, können wir demnach die zweite Lösung so schreiben

$$u_2 = \Sigma U_n = x^{\varrho_1}\cdot A\log x\,\mathfrak{P}(x) + x^{\varrho_2}\mathfrak{P}^*(x).$$

Das Resultat läßt sich folgendermaßen aussprechen:

ϱ_1 und ϱ_2 seien die beiden Wurzeln der Gleichung (11). Es möge $\Re(\varrho_1)\geqq\Re(\varrho_2)$ sein. Dann besitzt die Differentialgleichung

$$u'' + u'\frac{\mathfrak{P}_1(z-b)}{z-b} + u\frac{\mathfrak{P}_2(z-b)}{(z-b)^2} = 0 \tag{13}$$

in der Umgebung von $z=b$ stets ein Fundamentalsystem von der Gestalt

$$u_1 = (z-b)^{\varrho_1}\mathfrak{P}(z-b),$$

$$u_2 = (z-b)^{\varrho_1}A\log(z-b)\cdot\mathfrak{P}(z-b) + (z-b)^{\varrho_2}\mathfrak{P}^*(z-b).$$

Wenn die Differenz $\varrho_1-\varrho_2$ keine ganze Zahl ist, so fällt stets das mit dem Logarithmus behaftete Glied weg, die Konstante A ist gleich Null zu setzen. Wenn aber die Differenz $\varrho_1-\varrho_2$ eine ganze Zahl ist, dann ist im allgemeinen A von Null verschieden. Der Konvergenzkreis der beiden hier vorkommenden Potenzreihen reicht bis zum nächsten singulären Punkt.

Dies Resultat kann man ja auch durch andere Methode bekommen; aber die Approximationen mittels der Integralgleichung geben nicht nur den Existenzbeweis, sondern auch einen praktischen Weg zur wirklichen Berechnung.

Die Methode ist auch dann verwendbar, wenn sie nicht auf Potenzreihen, sondern auf Reihen führt, die nach andern Funktionen fortschreiten. Als Beispiel betrachten wir die Besselsche Differentialgleichung.

I.

Anwendung auf die Besselsche Differentialgleichung.

$$u'' + \frac{1}{x}\,u' + \left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)u = 0.$$

Aus (5), (6) und (11) bekommt man

$$u_1 = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \frac{1}{2n}\int_x^x (x^{-n}\xi^n - x^n\xi^{-n})\,\xi\,u_1(\xi)\,d\xi,$$

darauf nach (9)

$$U_0 = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n, \qquad U_1 = -\frac{1}{\Gamma(n+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}.$$

Nimmt man

$$U_m = \frac{(-1)^m}{\Gamma(n+m+1)\,m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}$$

an, so wird

$$U_{m+1} = \frac{(-1)^m}{\Gamma(n+m+1)\,m!}\,\frac{1}{2n}\left(\frac{x^{n+2m+2}}{2n+2m+2} - \frac{x^{n+2m+2}}{2m+2}\right) = \frac{(-1)^{m+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m+2}}{\Gamma(n+m+2)\,(m+1)!}.$$

Daher erhalten wir

$$(14) \qquad u_1 = J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{n+2m}}{\Gamma(n+m+1)\,m!\,2^{n+2m}}.$$

Die zweite Lösung gewinnt man aus

$$u_2 = -2^{n-1}\Gamma(n)x^{-n} + \frac{1}{2n}\int^x (x^{-n}\xi^n - x^n\xi^{-n})\,\xi\,u_2(\xi)\,d\xi:$$

$$U_0 = -2^{n-1}\Gamma(n)x^{-n}, \qquad U_1 = -2^{n-3}\Gamma(n-1)x^{-n+2}.$$

Wenn n keine ganze Zahl ist, folgt aus

$$U_m = -2^{n-1-2m}\frac{\Gamma(n-m)}{m!}x^{-n+2m}:$$

$$U_{m+1} = -2^{n-1-2m-2}\frac{\Gamma(n-m-1)}{(m+1)!}x^{-n+2m+2}.$$

Daher erhalten wir

$$(15) \qquad u_2 = -\sum_{m=0}^{\infty} 2^{n-2m-1}\frac{\Gamma(n-m)}{m!}x^{-n+2m} = -\frac{\pi}{\sin n\pi}J_{-n}(x).$$

Wenn n eine ganze Zahl ist, kann man nur bis zu $m = n-1$ auf diese Weise fortschreiten; darauf folgt

$$U_n = \frac{-1}{(n-1)!\,2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2n}\int^x (x^{-n}\xi^n - x^n\xi^{-n})\,\xi\,\xi^{n-2}\,d\xi$$

$$= -\frac{1}{n!}\,\frac{1}{2n}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \log x.$$

Das erste Glied kann man weglassen, es liefert den Beitrag $-\frac{J_n(x)}{2n}$ zum Resultat. Durch (9) überträgt sich jetzt weiter die Formel

$$(16) \qquad U_{n+m} = \frac{(-1)^m x^{n+2m}}{2^{n+2m}\,m!\,\Gamma(n+m+1)}\log x$$

$$+ \frac{(-1)^{m-1}x^{n+2m}}{2^{n+2m}\,m!\,(n+m)!}\sum_1^m\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2n+2\mu}\right)$$

von m $(\geqq 0)$ auf $m+1$. Daher erhalten wir

$$u_2 = -\frac{1}{2n} J_n(x) + \Sigma U_m$$

$$= \frac{\pi}{2} Y_n(x) + J_n(x) \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} \right) + \log 2 - c \right\}, \tag{17}$$

wo

$$Y_n(x) = \frac{1}{\sin n\pi} \{ \cos n\pi \, J_n(x) - J_{-n}(x) \}.$$

Wir brauchen nicht besonders zu bedenken, ob n eine ganze Zahl ist. Dieselbe Methode liefert ohne Fallunterscheidung das gewünschte Ergebnis.

II.

Für das Folgende benötigen wir das (von zwei ganzzahligen Indizes i und λ abhängige) Integral

$$I_i^{\lambda} = \frac{\pi}{2} \int_0^z \{ J_n(\zeta) Y_n(z) - J_n(z) Y_n(\zeta) \} \left(\frac{\zeta}{2} \right)^{\lambda+i} \zeta J_{n+i}(\zeta) \, d\zeta. \tag{18}$$

Wir schreiben die beiden Differentialgleichungen

$$y_1'' + \frac{1}{x} y_1' + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{x^2} \right) y_1 = 0,$$

$$y_2'' + \frac{1}{x} y_2' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y_2 = 0$$

an, multiplizieren die erste mit $y_2 = J_n(x)$, die zweite mit $y_1 = J_n(\alpha x)$ oder $Y_n(\alpha x)$, und subtrahieren:

$$\frac{d}{dx} \{ x (y_1' y_2 - y_2' y_1) \} = (1 - \alpha^2) y_1 y_2 x.$$

Im Limes für $\alpha = 1$ kommt

$$x y_1 y_2 = \frac{d}{dx} \left\{ \lim_{\alpha \to 1} \frac{x (y_1' y_2 - y_2' y_1)}{1 - \alpha^2} \right\} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2 y_1' y_2' - x^2 y_1'' y_2 - x y_1' y_2).$$

Wir multiplizieren die beiden Seiten mit x^m und integrieren von 0 bis z,

$$(m+1) \int_0^z J_n(x) J_n(x) x^{m+1} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[x^{m+2} (J_n' J_n' - J_n'' J_n) - m J_n J_n' x^{m+1} + \frac{m^2}{2} J_n J_n x^m \right]_0^z \tag{19}$$

$$+ m \left(n^2 - \frac{m^2}{4} \right) \int_0^z J_n J_n x^{m-1} \, dx,$$

$$(20)\quad (m+1)\int_0^z J_n(x)\,Y_n(x)\,x^{m+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[x^{m+2}(J_n' Y_n' - J_n'' Y_n) - m J_n' Y_n x^{m+1} + \frac{m^2}{2} J_n Y_n x^m - \frac{m x^m}{\pi}\Big]_0^z$$

$$+ m\left(n^2 - \frac{m^2}{4}\right)\int_0^z J_n Y_n x^{m-1}\,dx.$$

Durch die Lommelsche Identität

$$J_{n+1} Y_n - J_n Y_{n+1} = J_n Y_n' - J_n' Y_n = \frac{2}{\pi z}$$

kann man aus (19) und (20) die folgenden Formeln erhalten:

$$(21)\quad I_0^{2\lambda} = \frac{1}{2\lambda+1}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\lambda+1} J_{n+1}(z) + \frac{n-\lambda}{2(2\lambda+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\lambda} J_n(z) + \frac{\lambda(n^2-\lambda^2)}{2(2\lambda+1)} I_0^{2\lambda-2}$$

$$(\lambda \neq 0),$$

$$(22)\quad I_0^0 = \frac{z}{2} J_{n+1}(z) \qquad (\lambda = 0).$$

Da

$$\int_0^z J_{n+1} Y_n x^{2m+2}\,dx = (n+m+1)\int_0^z J_n Y_n x^{2m+1}\,dx$$

$$- \frac{1}{2} Y_n J_n z^{m+2} - \frac{1}{2x(m+1)} z^{m+2},$$

$$\int_0^z J_{n+1} J_n x^{2m+2}\,dx = (n+m+1)\int_0^z J_n J_n x^{2m+1}\,dx - \frac{1}{2} J_n J_n z^{m+2}$$

ist, so wird

$$(23)\quad I_1^{2\lambda} = \frac{n+1+\lambda}{2} I_0^{2\lambda} + \frac{1}{2(\lambda+1)} J_n(z)\left(\frac{z}{2}\right)^{2\lambda+2}.$$

Wir haben die Rekursionsformel

$$J_{n+2}(x) = 2\frac{n+1}{x} J_{n+1}(x) - J_n(x),$$

aus der durch Induktion sich ergibt

$$(24)\quad \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1} J_{n+2m+1}(x)$$

$$= (-1)^m \sum_0^m (-1)^k \frac{\Gamma(m+k+1)\,\Gamma(n+m+k+1)}{\Gamma(m-k+1)\,\Gamma(2k+1)\,\Gamma(n+m-k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-2k+1} J_{n+1}(x)$$

$$- (-1)^m \sum_0^{m-1} (-1)^k \frac{\Gamma(m+k+1)\,\Gamma(n+m+k+2)}{\Gamma(m-k)\,\Gamma(2k+2)\,\Gamma(n+m-k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-2k} J_n(x),$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2} J_{n+2m+2}(x)$$

$$= (-1)^m \sum_0^m (-1)^k \frac{\Gamma(m+k+2)\,\Gamma(n+m+k+2)}{\Gamma(m-k+1)\,\Gamma(2k+2)\,\Gamma(n+m-k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-2k+1} J_{n+1}(x)$$

$$- (-1)^m \sum_0^m (-1)^k \frac{\Gamma(m+k+1)\,\Gamma(n+m+k+2)}{\Gamma(m-k+1)\,\Gamma(2k+1)\,\Gamma(n+m-k+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-2k+2} J_n(x).$$

Die Annahme

26) $$I_i^0 = \frac{1}{i+1} \left(\frac{z}{2}\right)^{i+1} J_{n+i+1}(z)$$

führt mittels (21), (22), (23), (24) und (25) zu

$$I_{i+1}^0 = \frac{1}{i+2} \left(\frac{z}{2}\right)^{i+2} J_{n+i+2}(z),$$

und damit wird die Annahme bestätigt.

Für

$$L_i^\lambda = \frac{\pi}{2} \{ \int_0^z J_n(x)\, Y_n(z) - \int^z Y_n(x)\, J_n(z) \} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+i} x\, Y_{n+i}(x)\, dx$$

folgt auf gleiche Art wie für I_i^λ, daß

27) $$L_0^{2\lambda} = \frac{1}{2\lambda+1} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\lambda+1} Y_{n+1}(z) + \frac{n-\lambda}{2(2\lambda+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\lambda} Y_n(z) + \frac{\lambda(n^2-\lambda^2)}{2(2\lambda+1)} L_0^{2\lambda-2},$$

28) $$L_1^{2\lambda} = \frac{n+1+\lambda}{2} L_0^{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda+1} Y_n(z) \left(\frac{z}{2}\right)^{2\lambda+2},$$

29) $$L_0^0 = \left(\frac{z}{2}\right) Y_{n+1}(z),$$

30) $$L_i^0 = \frac{1}{i+1} \left(\frac{z}{2}\right)^{i+1} Y_{n+i+1}(z).$$

III.

Lösungen von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch Reihen nach Besselschen Funktionen.

1. $$u'' + \frac{1}{x} u' + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{x^2}\right) u = 0,$$

$$v'' + \frac{1}{x} v' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) v = 0,$$

$$u_1 = J_n(\alpha x), \quad u_2 = Y_n(\alpha x),$$

$$v_1 = \alpha^n J_n(x), \quad v_2 = \alpha^n Y_n(x).$$

In der Umgebung von $\alpha = 1$ und $x = 0$ gilt

$$J_n(\alpha x) = \alpha^n J_n(x), \quad Y_n(\alpha x) = \alpha^n Y_n(x).$$

In der Tat erhält man aus (5), (6) und (7), wobei man die erste Gleichung auf die Form

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)u = (1-\alpha^2)u$$

bringt,

$$J_n(\alpha x) = \alpha^n J_n(x) + (1-\alpha^2)\frac{\pi}{2}\int_0^x \{J_n(\zeta)Y_n(z) - Y_n(\zeta)J_n(x)\}\zeta J_n(\alpha\zeta)\,d\zeta.$$

Aus (26) folgt somit

$$J_n(\alpha x) = \alpha^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha^2)^\lambda}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda J_{n+\lambda}(x), \tag{31}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n = \lim_{\alpha=0}\frac{J_n(\alpha x)}{\alpha^n} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda J_{n+\lambda}(x). \tag{32}$$

Für die zweite Lösung

$$Y_n(\alpha z) = \alpha^n Y_n(z) + \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[(1-\alpha^2)\frac{\pi}{2}\int_\varepsilon^z \{J_n(\zeta)Y_n(z) - J_n(z)Y_n(\zeta)\}\zeta Y_n(\alpha\zeta)\,d\zeta$$

$$+ J_n(z)\{Y_n(\alpha\varepsilon)Y_n'(\varepsilon) - Y_n'(\alpha\varepsilon)Y_n(\varepsilon)\}\frac{\varepsilon\pi}{2}\Big]$$

erhalten wir, da

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big[-(1-\alpha^2)\int_\varepsilon^z Y_n(\zeta)Y_n(\alpha\zeta)\zeta\,d\zeta + \{Y_n(\alpha\varepsilon)Y_n(\varepsilon) - Y_n'(\alpha\varepsilon)Y_n(\varepsilon)\}\varepsilon\Big] \equiv 0$$

ist, die analoge Formel

$$Y_n(\alpha z) = \alpha^n Y_n(z) + c\,J_n(z)$$

$$+ (1-\alpha^2)\frac{\pi}{2}\{\int_0^z J_n(\zeta)Y_n(z) - \int^z J_n(z)Y_n(\zeta)\}\zeta Y_n(\alpha\zeta)\,d\zeta,$$

und aus (26) und (30):

$$Y_n(\alpha z) = \alpha^n \sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha^2)^\lambda}{\lambda!}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda Y_{n+\lambda}(z) + c\,J_n(\alpha z); \tag{33}$$

c muß Null sein. Um das zu beweisen, differentiieren wir (33) nach α,

$$Y_{n+1}(\alpha z) = \alpha^{n+1}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha^2)^\lambda}{\lambda!}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda Y_{n+\lambda+1}(z) \tag{34}$$

$$- c'\frac{J_n(\alpha z)}{z} + c\,J_{n+1}(\alpha z),$$

setzen $n+1$ in (33) anstatt n und vergleichen mit (34). Da c von z

unabhängig ist, so muß $c' = \frac{dc}{d\alpha}$ gleich Null sein. Außerdem muß c im Punkt $\alpha = 1$ verschwinden, folglich ist c immer $= 0$:

$$Y_n(\alpha z) = \alpha^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha^2)^\lambda}{\lambda!} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda Y_{n+\lambda}(z). \tag{35}$$

2. Es sei die Gleichung vorgelegt

$$u'' + \left(\frac{1}{x} + \alpha_1 x + \alpha_2 x^3 + \ldots\right) u' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} + \beta_1 x^2 + \ldots\right) u = 0;$$

zum Vergleich wird die Besselsche Differentialgleichung

$$v'' + \frac{1}{x} v' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) v = 0$$

herangezogen. Eine Lösung der ersten Gleichung erhalten wir dann aus der Integralgleichung

$$u(z) = J_n(z) - \int_0^z K(z, \zeta)\, u(\zeta)\, d\zeta$$

mit dem Kern

$$K(z, \zeta) = \frac{\pi}{2} \Big[(J_n(z)\, Y_n(\zeta) - J_n(\zeta)\, Y_n(z))\, \zeta\, (\beta_1 \zeta^2 + \ldots) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \{ (J_n(z)\, Y_n(\zeta) - J_n(\zeta)\, Y_n(z))\, \zeta\, (\alpha_1 \zeta + \ldots) \} \Big].$$

Aus (21), (22), (23) und (26) folgt, daß sie durch die sukzessiven Approximationen als eine Reihe nach Besselschen Funktionen erhalten wird. Analog bekommt man für die zweite Lösung eine Entwicklung, die nach den Y_n fortschreitet.

Zürich, den 12. Dezember 1923.

(Eingegangen am 8. Februar 1924.)

Hilberts Beweise der Sätze über Flächen festen Gaußschen Krümmungsmaßes.

Von

Heinrich Liebmann in Heidelberg.

Hilbert hat zuerst im Jahre 1901 seinen später als „Anhang V“ in die „Grundlagen der Geometrie“ aufgenommenen Beweis des Satzes mitgeteilt, *daß es eine singularitätenfreie und überall reguläre analytische Fläche von konstanter negativer Krümmung nicht gibt.* An gleicher Stelle wird in einfacherer Schlußweise als von mir im Jahre 1899 der Satz begründet, *daß eine geschlossene singularitätenfreie Fläche mit konstantem positiven Krümmungsmaß* 1 *stets die Kugel mit dem Radius* 1 *sein muß.*

Die folgende Darlegung beschäftigt sich in Nr. 1—4 mit dem ersten Satz, dessen Beweis in der von Hilbert gegebenen Fassung nach einem Eingeständnis von maßgeblicher Seite[1]) dem Verständnis Schwierigkeiten bereitet, und der daher wohl — durchaus mit Verwendung des so überraschend einfachen Grundgedankens — eine neue Bearbeitung verträgt (Nr. 4), die überdies den Geltungsbereich *erweitert.* Wesentlich ist im folgenden die Einführung einer auf die Euklidische Ebene umkehrbar eindeutig abbildbaren Überdeckungs- oder Mantelfläche $\overline{F}$ (Nr. 1), außerdem die Heranziehung eines scheinbar selbstverständlichen und jedenfalls deshalb bisher wohl kaum ausgesprochenen, aber durchaus an bestimmte Voraussetzungen gebundenen Satzes (Nr. 2), insbesondere IIc. Es wird sodann eine allgemeinere, nicht auf Flächen mit festem negativen Krümmungsmaß beschränkte Fassung des Hatzidakisschen Satzes abgeleitet (Nr. 3), die schließlich die angesagte Erweiterung des Hilbertschen Satzes bewirkt (Nr. 4).

[1]) E. Goursat, Sur les surfaces à courbure constante négative. Bull. Soc. Math. 37 (1909), S. 51—58.

Da Hilbert auch beim Beweis des zweiten Satzes dem Leser ein indendes Glied sehr kurz faßt, so möge es gestattet sein, eine Ergänzung benfalls mitzuteilen (Nr. 5).

1. Die Mantelfläche.

Jede reguläre Fläche F (Grundfläche) mit beschränkter negativer Krümmung K,

$$0 < m_1 \leqq -K \leqq m_2$$

ann, auch wenn sie einseitig ist, unter Verwendung eines sogleich zu beschreibenden geodätischen Orthogonalsystems mit einer umkehrbar eindeutig uf die Euklidische Ebene abbildbaren Mantelfläche $\bar{F}$ überdeckt werden. Man wählt einen Anfangspunkt $\bar{P}_0$ auf F beliebig und bedeckt irgendeine P_0 enthaltende geodätische Linie g_0 durch fortgesetzte Streckenabtragung ach beiden Seiten hin mit der „Mantellinie" $\bar{g}_0$, der man die x-Achse nit dem Nullpunkt als Bild von P_0 zuordnet. Die Überdeckung ist dann nd nur dann einfach, wenn g_0 weder einen Doppelpunkt besitzt noch in ich zurückläuft.

An diese Grundlinie schließt man die von ihren Punkten nach beiden eiten senkrecht ausgehenden geodätischen Linien (h), die genau so zu berdecken sind $(\bar{h})$. So entsteht die Mantelfläche $\bar{F}$. Ein Doppelpunkt uf ihr könnte nur dann auftreten, wenn zwei von $\bar{g}_0$ ausgehende $\bar{h}$-Strecken nit dem Grundlinienstück zusammen ein geodätisches Dreieck einschließen würden, dessen Winkelsumme größer als π ist, und das kann wegen der egativen Krümmung nicht vorkommen.

Durch Streckenabtragung sind dann noch die $\bar{h}$-Linien den Ordinaten uzuordnen, womit die umkehrbar eindeutige Zuordnung $\bar{F} \rightarrow E$ vollzogen ist.

Diese Mantelfläche, deren Aufbau übrigens durch die geringere Beschränkung

$$0 \leqq -K \leqq m$$

nicht gestört würde, dient im folgenden durchweg als Ersatz für F.

2. Das Netz der Asymptotenlinien.

Auf $\bar{F}$ sind die Asymptotenlinien durch eine von singulären Stellen reie Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades gegeben. Von edem Punkt gehen wegen

$$|K| \geqq m_1 > 0$$

wei Asymptotenlinien aus, und zwar ist der Sinus des Neigungswinkels *gleichmäßig* beschränkt auf der ganzen Fläche

$$\sin^2 \varphi \geqq \sin^2 \varepsilon \qquad \left(0 < \varepsilon \leqq \frac{\pi}{2}\right),$$

oder auch

$$0 < \varepsilon \leqq \varphi \leqq \pi - \varepsilon.$$

Es soll jetzt der folgende, im indirekten Beweis für den Hilbertschen Satz zu verwendende Satz abgeleitet werden.

Einschließungssatz.

Jedes ganz im Endlichen gelegene Teilgebiet von $\bar{F}$ kann durch ein aus Strecken von Asymptotenlinien gebildetes Viereck (As.-Viereck) *umschlossen werden.*

Es wird gut sein, zunächst einmal ein Bedenken von Goursat aufzugreifen, der die mit dem Einschließungssatz verwandte Frage der Herstellung eines aus As.-Bögen zu bildenden *Treppenweges* zwischen zwei Punkten an der Hand eines Beispiels kritisch beleuchtet hat.

Man kann jedenfalls jeden Punkt $\bar{P}$ von $\bar{F}$ mit einem hinreichend kleinen, aber nach unten *gleichmäßig* beschränkten Feld umgeben, z. B. einem As.-Viereck („Probeviereck"), das seinerseits einen um $\bar{P}$ als Mittelpunkt beschriebenen geodätischen Kreis mit von $\bar{P}$ unabhängigem Radius umschließt. Innerhalb des Probevierecks um $\bar{P}$ können dann je zwei Punkte durch beliebig viele Treppenwege verbunden werden und es schneiden je zwei ins Innere eintretende Asymptotenlinien, die nicht derselben Schar angehören, innerhalb des Vierecks einander in je einem Punkt. Legt man jetzt von $\bar{A}$ nach $\bar{B}$ irgendeinen Kurvenbogen $(\bar{A}\bar{B})$, so kann man auf ihm von $\bar{A}$ aus das offene Gebiet der erreichbaren Punkte vorschieben. Würde dabei $\bar{B}$ nicht erreicht, so müßte die Ergänzungsmenge zu den erreichbaren Punkten einen ersten nicht erreichbaren Punkt $\bar{C}$ zwischen $\bar{A}$ und $\bar{B}$ aufweisen. Damit käme man aber auf einen Widerspruch, denn der Treppenweg kann ja der Voraussetzung nach bis in beliebige Nähe von $\bar{C}$, also in das $\bar{C}$ umgebende Probeviereck hinein fortgesetzt und damit der Anschluß $\bar{A} \to \bar{C}$ durch Treppenweg gewonnen werden.

Den Einschließungssatz werden wir jetzt, davon ausgehend, daß die As.-Linien in zwei getrennte, $\bar{F}$ *einfach* überdeckende Kurvenscharen S_1 und S_2 ohne singuläre Stellen zerfallen, begründen können, wenn erwiesen ist:

I. *Jede Asymptotenlinie zerlegt $\bar{F}$ in zwei ins Unendliche reichende Teilgebiete.*

II. *Jede Kurve S_1 schneidet jede Kurve S_2 in einem und nur einem Punkt.*

II spricht folgende drei Behauptungen aus:

IIa: Es gibt kein Zweieck von As.-Bögen, in dem beide Innenwinkel $> \pi$ oder beide $< \pi$ sind.

IIb: Es gibt kein Zweieck von As.-Bögen, in dem der eine Innenwinkel $< \pi$, der andere $> \pi$ ist.

IIc: Jede S_1 trifft jede S_2 mindestens einmal.

IIa folgt einfach daraus, daß andernfalls der S_1-Bogen, auf der einen eite von einem S_2-Bogen überspannt, notwendig selber auch eine Beührungsstelle mit einer S_2 aufweisen müßte, was unmöglich ist.

I ergibt sich aus dem Poincaréschen Satz, daß jede im Endlichen erlaufende Integralkurve entweder asymptotisch gegen eine geschlossene ntegralkurve verlaufen oder selber geschlossen sein muß[2]). Wenn also ne S_1^1 nicht nach beiden Seiten ins Unendliche verläuft, so gibt es eine eschlossene C_1^1 (Zykl). Keine darin eintretende S_2 kann C_1^1 wieder verssen nach IIa, also muß eine solche S_2 im Innern von C_1^1 einem C_2^1 sich symptotisch nähern. Man erhält so eine unbegrenzte Folge von Zyklen

$$C_1' C_2' C_1^2 C_2^2 \ldots C_1^n C_2^n \ldots,$$

on denen jeder folgende ganz innerhalb des vorhergehenden verläuft. amit stößt man aber auf eine Unmöglichkeit. Ist nämlich J ein gemeinmer innerer Punkt aller dieser Zyklen[3]) und R ein Randpunkt auf C_1^1, so eist jede Verbindungskurve JR mindestens einen Häufungspunkt H von chnittpunkten mit den $C_1 C_2$ in wechselnder Folge auf; anderseits kann an um H ein Probeviereck beschreiben, innerhalb dessen die S_1 und S_2, so die C_1 und C_2 einander schneiden müßten, die doch keinen Punkt emein haben.

Damit ist für den Fall des Nichtbestehens von I ein Widerspruch stgestellt. Insbesondere gilt auch der Satz:

Es gibt auf $\bar{F}$ keine geschlossene Asymptotenlinien.

IIb hat folgende Bedeutung: Es sei $A P_1 B$ ein S_1-Bogen, $A P_2 B$ ein $_2$-Bogen, der in A beginnend, dann in B den S_1-Bogen von der andern eite her erreicht. Diese Figur ist unmöglich.

In der Tat würde eine bei P_1 in das so berandete Gebiet eintretende $_2$ weder $A P_1 B$ zum zweitenmal schneiden können (IIb), noch auch den $_2$-Bogen $A P_2 B$, sie müßte also nach Poincaré gegen eine geschlossene -Kurve asymptotisch verlaufen, und die gibt es nicht, wie wir schon issen. —

Ist damit erwiesen, daß die S_1 und S_2 die $\bar{F}$ nach Art eines Carteschen Koordinatennetzes[4]) überdecken? Es fehlt hierzu noch der Nachweis von IIc, und gerade den dahin zielenden Folgerungen Hilberts (der

[2]) Vgl. den Bendixsonschen Beweis, dargelegt in L. Bieberbach, Theorie r Differentialgleichungen 1923, S. 56—58.

[3]) Oder, schärfer ausgedrückt, ein Punkt, der nicht innerhalb eines der von ußen nach innen sich anbauenden Ringgebiete liegt.

[4]) Diese Frage gab wohl für Goursat den Anlaß, trotz des Holmgrenschen nalytischen Beweises für den Hilbertschen Satz (Paris Comptes Rendus **134** (1902), 740—733) die Frage einer neuen Bearbeitung zu unterziehen.

festes negatives Krümmungsmaß voraussetzt, aber die Fläche selbst statt der übersichtlichen Mantelfläche $\overline{F}$ benützt) ist schwer beizukommen. — Der Einschließungssatz ist dann selbstverständlich. —

Es sei zunächst der Deutlichkeit halber auf ein ganz einfaches Beispiel hingewiesen.

Die Differentialgleichung

$$y'(y' + e^{-x}) = 0$$

definiert das Netz

$$(S_1)\, u = y, \qquad (S_2)\, v = y - e^{-x}.$$

Für dieses Netz gilt I, IIa und IIb, nicht aber IIc, denn z. B. die Kurven $u = -1$, $v = 0$ schneiden einander nicht. —

Im übrigen ist der Beweis von IIc sehr einfach zu führen.

S_3 möge in P die Kurve S_1 durchsetzen, S_1' sei irgendeine auf der andern Seite gelegene Kurve der Schar S_1. Dann legt man durch P die beiden Isogonaltrajektorien W_1, W_2, die die Neigungswinkel ε und $\pi - \varepsilon$ gegen S_1 besitzen, sie schneiden beide S_1' ($P_1' P_2'$) und grenzen einen Bereich ab, den S_2 wegen

$$\varepsilon \leqq \varphi \leqq \pi - \varepsilon$$

bei P betritt und zwischen P_1' und P_2' verläßt. (In dem Beispiel versagt der Beweis, weil $\sin^2 \varphi$ nicht nach Null hin beschränkt ist.) —

Schließlich ist noch einiger Folgerungen zu gedenken, die sich daraus ergeben, daß die bewiesenen Sätze sich nur auf das Fehlen von Singularitäten (womit eine obere Schranke für die Krümmung der Integralkurven festgelegt ist) und die Beschränkung des Neigungswinkels stützen.

Man kann auf diesem Wege unter gleichen Voraussetzungen beweisen, daß die durch eine Differentialgleichung n-ter Ordnung definierten n Kurvenscharen $S_1, S_2, \ldots, S_n$ alle die Ebene einfach überdecken, daß jede Kurve nach beiden Seiten ins Unendliche verläuft, und daß jede S_i jede S_p in einem und nur einem Punkt trifft. —

Nimmt man für S_2 die Orthogonaltrajektorien einer Schar S_1 (die als singularitätenfrei und von nach oben beschränkter Krümmung vorausgesetzt ist), so zeigt sich, daß die Schar S_1 keinen Grenzzykl besitzt.

3. Erweiterung des Hatzidakisschen Satzes.

Um den Flächeninhalt des sphärischen Bildes eines As.-Vierecks $A(u_0, v_0)$, $B(u_1, v_0)$, $C(u_1, v_1)$, $D(u_0, v_1)$ mit den Innenwinkeln α, β, γ, δ auszudrücken, bedienen wir uns der Bonnetschen Formel

$$\int K\, df = -\int \frac{ds}{\varrho} + 2\pi - \Sigma \tau,$$

der unter den τ die Außenwinkel

$$\tau_1 = \pi - \alpha, \quad \tau_2 = \pi - \beta, \quad \tau_3 = \pi - \gamma, \quad \tau_4 = \pi - \delta$$

zu verstehen sind.

Das Krümmungsmaß sei bezeichnet mit

$$K = -r^{-2};$$

als Gaußsche Koordinaten sind die Asymptotenlinien zu verwenden, und das Bogenelement sei gegeben durch

$$ds^2 = e^2 du^2 + 2 e g \cos\varphi \, du \, dv + g^2 dv^2.$$

Die Gaußsche Formel gibt

$$M = e g r \sin\varphi,$$

und die Mainardi-Codazzischen Formeln ergeben dann

$$r^{-1}(-r_v e \sin^2\varphi) = 2(g_u \cos\varphi - e_v),$$

$$r^{-1} r_u g \sin^2\varphi \quad = 2(g_u - e_v \cos\varphi).$$

Für die geodätischen Krümmungen gilt:

$$\frac{e}{\varrho_1} = -\varphi_u + \frac{1}{g \sin\varphi}(g_u \cos\varphi - e_v) = -\varphi_u - \frac{r_v e \sin\varphi}{2 r g} \quad (v = \text{konst.}),$$

$$\frac{g}{\varrho_2} = \varphi_v + \frac{1}{e \sin\varphi}(g_u - e_v \cos\varphi) = \varphi_v + \frac{r_u g \sin\varphi}{2 r g} \quad (u = \text{konst.}).$$

hat an den Ecken A, B, C, D die Werte

$$\alpha, \quad \pi - \beta, \quad \gamma, \quad \pi - \delta$$

und die vier Summanden des Randintegrals werden

$$(v = v_0): \int_A^B = \int_{u_0}^{u_1} \frac{e\,du}{\varrho_1} = -\pi + \alpha + \beta - \frac{1}{2}\int_{u_0}^{u_1} \frac{\sin\varphi}{r g}\frac{\partial r}{\partial v} e\,du,$$

$$(u = u_1): \int_B^C = \int_{v_0}^{v_1} \frac{g\,dv}{\varrho_2} = -\pi + \beta + \gamma + \frac{1}{2}\int_{v_0}^{v_1} \frac{\sin\varphi}{r e}\frac{\partial r}{\partial u} g\,dv,$$

$$(v = v_1): \int_C^D = \int_{u_1}^{u_0} \frac{e\,du}{\varrho_1} = -\pi + \gamma + \delta - \frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_0} \frac{\sin\varphi}{r g}\frac{\partial r}{\partial v} e\,du,$$

$$(u = u_0): \int_C^D = \int_{v_1}^{v_0} \frac{g\,dv}{\varrho_2} = -\pi + \alpha + \delta + \frac{1}{2}\int_{v_1}^{v_0} \frac{\sin\varphi}{r e}\frac{\partial r}{\partial u} g\,dv.$$

Bezeichnen wir noch die Bogenelemente der Asymptotenlinien mit

$$ds(u) = e\,du, \quad ds(v) = g\,dv,$$

so entsteht

$$-\int K\,df = \int r^{-3}\,df = \alpha+\beta+\gamma+\delta-2\pi+R,$$

wobei gesetzt ist

$$R=\frac{1}{2}\Big(-\int_A^B \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial r}{\partial s(v)}\,ds(u)+\int_B^C \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial r}{\partial s(u)}\,ds(v)$$

$$-\int_C^D \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial r}{\partial s(v)}\,ds(u)+\int_D^A \frac{2\sin\varphi}{r}\frac{\partial r}{\partial s(u)}\,ds(v).$$

Im ersten Integral ist $v=v_0$, im zweiten $u=u_1$, im dritten $v=v_1$, im vierten $u=u_0$ zu setzen.

Für $K=-1$, $r=1$ entsteht wieder die Hatzidakissche Formel.

4. Hilberts Satz für Flächen negativer Krümmung.

Auf Flächen beschränkter negativer Krümmung, vielmehr auf deren Mantelfläche $\overline{F}$, kann man leicht Gebiete finden, deren Inhalt ohne Schranken zu vergrößern ist; z. B. hat ein Viereck $P_1P_2P_3P_4$, in dem $P_1P_2=P_3P_4=b$ geodätische Strecken senkrecht zur geodätischen Strecke $P_2P_3=a$ sind, während P_1P_4 die zu P_2P_3 senkrechten Geodätischen senkrecht schneidet, den Inhalt

$$J>ab,$$

der mit a und b ins Unendliche wächst.

Jedes solche Viereck kann aber nach dem Einschließungssatz (Nr. 2) in ein As.-Viereck eingeschachtelt werden, dessen Inhalt, wenn

$$|K|\geqq m_1$$

ist, nach Nr. 3 nicht größer sein kann als

$$\frac{1}{m_1}(\alpha+\beta+\gamma+\delta-2\pi+R).$$

Im Fall *konstanter* negativer Krümmung ist R gleich Null, aber auch *bei allgemeineren Annahmen*, wenn z. B. K auf allen ins Unendliche laufenden Wegen sich mit hinreichend starker Konvergenz asymptotisch einem konstanten Wert nähert, entsteht wegen

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta-2\pi<2\pi$$

der Widerspruch, daß eine ins Unendliche wachsende Größe durch eine Schranke limitiert wird.

Damit ist der Hilbertsche Satz in erweiterter Form bewiesen.

Wenn man übrigens einmal Umschau hält unter den ohne Singularitäten sich ins Unendliche erstreckenden Flächen negativer Krümmung, so

emerkt man, daß, wie z. B. bei den Regelflächen, $|K|$ bei Gebietserwei-erung nach Null abnimmt, oder aber die Fläche unendlich viele Null-ellen des Krümmungsmaßes aufweist, wie gewisse knoten- und doppel-unktfreie Minimalflächen von H. A. Schwarz, die in jedem der periodisch ch wiederholenden Teile solche Stellen besitzen.

Daß die Forderung der Regularität auf die untere Schranke von $|K|$ rückt, zeigen die Drehflächen negativer Krümmung, bei denen ja die onvexität des Meridians gegen die Drehachse den Abschnitt der Normale vischen ihr und dem Meridian unbeschränkt anzuwachsen zwingt.

Zum Schluß sei die vielleicht einfach zu beantwortende Frage auf-eworfen: Gibt es reguläre Flächen negativer Krümmung, die, wie das nschalige Hyperboloid, denselben Zusammenhang wie ein Zylinder be-tzen, deren Krümmungsmaß aber dem absoluten Betrage nach beschränkt $|K| > m_1 > 0$)?

5. Die Flächen festen positiven Krümmungsmaßes.

Hilbert hat a. a. O. gezeigt, daß auf einer geschlossenen singularitäten-eien Fläche festen positiven Krümmungsmaßes $K = 1$ der größere Haupt-rümmungsradius ($R_1 \geqq 1$) kein eigentliches Maximum besitzen kann, also onstant sein muß. Daß diese Konstante dann gerade gleich *Eins*, daß $_1 = R_2 = 1$ und die Fläche dann eine Kugel sein muß, ist an sich nicht lbstverständlich. Um dessen sicher zu sein, muß man wissen, daß über-aupt nur für die Kugel R_1 und R_2 konstante Werte haben[5]).

Ohne Rechnung gelangt man (im Reellen, was hier genügt) zu diesem rgebnis, wenn man beachtet, daß die innere Parallelfläche im Abstand c onstantes negatives Krümmungsmaß

$$K = 1 : (a - c)(b - c) < 0$$

esitzen müßte und keine Singularität, also schon wegen der beschränkten rstreckung ein unmögliches Gebilde wäre.

Heidelberg, im April 1924.

---

[5]) Beweis hierfür z. B. bei Scheffers, Differentialgeometrie II, 3. Abschnitt, tz 31 (S. 358 der ersten Auflage). — Vgl. hierzu bei Blaschke (Differential-ometrie I, S. 129) die Durchführung der analytischen Schlußweise Hilberts.

(Eingegangen am 15. April 1924.)

Über die asymptotischen Werte der ganzen Funktionen endlicher Ordnung.

Von

Ludwig Bieberbach in Berlin.

1. Herr Carleman[1]) hat kürzlich eine Vermutung des Herrn Denjoy bewiesen, wonach die Zahl der endlichen asymptotischen Werte, welche eine ganze Funktion endlicher Ordnung besitzen kann, durch die Ordnung limitiert ist. Asymptotische Werte werden dabei die Grenzwerte genannt, welchen eine ganze Funktion auf gewissen stetigen ins Unendliche ziehenden Kurven bei Annäherung an das Unendlichferne zustreben kann. Herr Carleman hat gezeigt, daß die Zahl der asymptotischen Werte kleiner als $\frac{\pi^2}{2}\varrho$ ist, wenn ϱ die Ordnung der ganzen Funktion bedeutet. Herr Carleman hat auch auf den seit Hurwitz[2]) bekannten Zusammenhang der asymptotischen Werte mit den nichtalgebraischen Singularitäten der Umkehrungsfunktion hingewiesen. Der Carlemansche Satz besagt alsdann, daß die Umkehrungsfunktion einer ganzen Funktion der Ordnung ϱ im Endlichen weniger als $\frac{\pi^2}{2}\varrho$ nichtalgebraische Singularitäten besitzt. In dieser Formulierung ist auch die Festsetzung darüber enthalten, wann zwei auf verschiedenen Wegen erreichte asymptotische Werte der ganzen Funktion als verschieden gelten sollen und wann nicht. Wir setzen fest, sie sollen als verschieden gelten, dann und nur dann, wenn ihnen verschiedene singuläre Stellen der Umkehrungsfunktion entsprechen. Einem Weg der z-Ebene nämlich, auf dem die ganze Funktion $f(z)$ einem asymptotischen Werte a zustrebt, entspricht in der w-Ebene $(w = f(z))$ eine in einem nichtalgebraischen singulären Punkt mit endlicher w-Koordinate a endigende Kurve. Erinnert man sich nun an die von mir gegebene Definition der

[1]) T. Carleman, Sur les fonctions inverses des fonctions entières d'ordre fini. Arkiv för Mat. Astron. och Fys. **15** (1921), Nr. 10, 7 S.

[2]) A. Hurwitz, Sur les points critiques des fonctions inverses. C. R. **143** (1906), S. 877–879, und **144** (1907), S. 63–65.

ingulären Stellen[3]), so erkennt man, daß zwei verschiedene Wege der -Ebene dann und nur dann denselben singulären Punkt mit der Koordiate a liefern, wenn man diese beiden Wege durch stetige Kurvenbogen niteinander verbinden kann, auf welchen $f(z)$ beliebig wenig von a verchieden ist. Das ist auch die, implizite dem Carlemanschen Beweis zurunde liegende Festsetzung über Gleichheit und Verschiedenheit zweier symptotischer Werte[4]).

Formuliert man so den Carlemanschen Satz — wie das ja auch Herr Carleman selbst getan hat — als einen Satz über die Anzahl der m Endlichen gelegenen nichtalgebraischen singulären Stellen der Umkehrungsfunktion, so erhebt sich naturgemäß die *Frage, ob auch die im Unendlichen gelegenen singulären Stellen in ihrer Anzahl beschränkt sind* oder nicht. Ich werde zeigen, daß dies in der Tat der Fall ist. Erst damit gewinnt dann — wie ich glaube — der Carlemansche Satz seine volle Abrundung. Ich werde beweisen, daß die Umkehrungsfunktion einer ganzen Funktion der Ordnung ϱ zwar stets mindestens eine nichtalgebraische singuläre Stelle besitzt[5]), daß aber weiter nur dann mehr als eine solche Stelle vorhanden ist, wenn $\frac{\pi^2}{2}\varrho > 1$ ist, daß dann aber die Anzahl dieser Stellen kleiner als $\pi^2\varrho$ ist. Dabei werden nun die im Endlichen und die im Unendlichen gelegenen Stellen im Sinne der oben erwähnten Definition gezählt.

Ich setze den Carlemanschen Satz als bewiesen voraus und werde zeigen, daß die Zahl der im Unendlichen gelegenen nichtalgebraischen singulären Stellen zwar mindestens 1 ist, aber nur dann größer als Eins sein kann, wenn $\frac{\pi^2}{2}\varrho > 1$ ist, dann aber kleiner als $\frac{\pi^2}{2}\varrho$ ist.

2. Im Sinne der erwähnten Definition liefern zwei stetige Kurven der z-Ebene, auf welchen $f(z)$ gegen Unendlich strebt, dann und nur dann den gleichen singulären Punkt der Umkehrungsfunktion, wenn man diese Wege durch stetige Kurven miteinander verbinden kann, auf welchen $f(z)$ überall nur Werte oberhalb einer beliebig vorgegebenen Schranke besitzt. Zwei solche Wege gelten dann als verschieden, wenn es eine Zahl $M > 0$ gibt, derart, daß jede stetige Kurve, welche die beiden Wege miteinander verbindet, die Menge derjenigen Punkte der z-Ebene treffen muß, in welchen $|f(z)| < M$ ist.

---

[3]) Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften II, 3, Heft 5 (1921), S. 401—404; Lehrbuch der Funktionentheorie 1 (1921), S. 209 ff.

[4]) Man vgl. auch die Darstellung von G. Valiron in seinen Lectures on the general theory of integral functions. Toulouse 1923. Herr Carleman äußert sich nicht darüber, ob er singuläre Stellen oder Koordinaten von singulären Stellen zählt.

[5]) Bekanntlich besitzt jede ganze Funktion den asymptotischen Wert Unendlich.

Ich nehme nun an, es gebe $n > 1$ Kurven, auf welchen $f(z)$ als verschieden zu zählenden Grenzwerten Unendlich zustrebt. Da dieselben außerhalb eines genügend großen Kreises einander nicht schneiden können, so ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß diese n Kurven alle den Punkt $z = 0$ mit $z = \infty$ verbinden und sich sonst nicht schneiden. Es ist weiter keine Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß die n Kurven Jordankurven, ja daß es Polygonzüge sind. Denn wenn man einer stetigen Kurve ein hinreichend benachbartes Sehnenpolygon einbeschreibt, so hat $f(z)$ auch auf diesem den Grenzwert Unendlich. Zunächst etwa vorhandene Schleifen darf man weglassen. Wir haben also jetzt n polygonale Jordankurven $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$, die Null mit Unendlich verbinden und die sich außerhalb dieser Punkte nicht schneiden. Auf jeder strebt $f(z)$ gegen Unendlich. Es gibt außerdem eine Zahl M von der Art, daß jede Jordankurve, die zwei dieser Kurven miteinander verbindet, mit der Menge $\mathfrak{M}(M)$ derjenigen Punkte z, in welchen $|f(z)| < M$ ist, Punkte gemein hat. Diese Zahl M sei so gewählt, daß $|f(0)| < M$ ist.

Die n Jordankurven zerlegen die Ebene in n Bereiche $B_1, \ldots, B_n$. *Ich behaupte, daß es in jedem derselben eine Jordankurve gibt, welche* 0 *mit* ∞ *verbindet, derart, daß auf dieser Kurve* $|f(z)|$ *beschränkt ist.*

3. Um das einzusehen, muß man die Menge $\mathfrak{M}(M)$ näher untersuchen. Auf jedem Kreise $|z| = \sigma$ gibt es in jedem Bereiche $B_\varkappa$ Punkte derselben. Andernfalls würde man nämlich einen Bogen eines solchen Kreises benutzen können, um zwei der Kurven $\mathfrak{C}_\varkappa$ zu verbinden, und auf ihm wäre $|f(z)| \geqq M$, gegen die Voraussetzung, daß man in dieser Weise zwei der Kurven nicht verbinden kann.

Ich gehe nun von der Menge $\mathfrak{M}(M)$ zur Menge $\overline{\mathfrak{M}}(M)$ über, die aus $\mathfrak{M}(M)$ dadurch hervorgeht, daß man ihr ihre Randpunkte adjungiert. In den endlichen dieser Randpunkte ist $|f(z)| = M$. Außerdem gehört zu den Randpunkten $z = \infty$. Außerhalb eines genügend großen Kreises ist $z = \infty$ der einzige Punkt, welchen die Menge $\overline{\mathfrak{M}}(M)$ mit den Kurven $\mathfrak{C}_\varkappa$ gemein hat. Ich betrachte nun die abgeschlossene Teilmenge $\overline{\mathfrak{M}}_\varkappa(M)$ von $\overline{\mathfrak{M}}(M)$, welche dem Bereiche $B_\varkappa$ oder dessen Rand angehört. Ich behaupte, daß es eine zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge Z derselben gibt, welche die Punkte $z = 0$ und $z = \infty$ enthält. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es unter den verschiedenen Kontinua, aus welchen die Menge $\overline{\mathfrak{M}}_\varkappa(M)$ besteht, eines $\overline{\mathfrak{M}}'_\varkappa(M)$, dem der Punkt $z = 0$ angehört, und welches beschränkt ist und von der Menge aller übrigen einen Abstand $\delta > 0$ besitzt. Ich behaupte, daß es dann einen Querschnitt Q des Bereiches $B_\varkappa$ geben muß, der die beiden Randkurven $L'_\varkappa$ und $L''_\varkappa$ von $B_\varkappa$ miteinander verbindet und auf dem $|f(z)| \geqq M$ sein muß, da er ja $\overline{\mathfrak{M}}_\varkappa(M)$ und also auch $\mathfrak{M}(M)$ nicht trifft, gegen die Voraussetzung, daß es solche

Wege nicht gibt. Durch Aufweisung dieses Widerspruches wird also gezeigt, daß es eine zusammenhängende Teilmenge der angegebenen Art gibt. Diesen Querschnitt aber konstruiert man folgendermaßen. Bekanntlich gibt es ein einfaches Polygon Π, das keinen Punkt der Menge $\overline{\mathfrak{M}}_\varkappa(M)$ trifft, und das $\overline{\mathfrak{M}}'_\varkappa(M)$ in seinem Inneren, den Rest der Menge $\overline{\mathfrak{M}}_\varkappa(M)$ in seinem Äußeren enthält. Auf diesem Polygon gibt es einen Streckenzug, welcher den gesuchten Querschnitt liefert. Denn das Kontinuum $\overline{\mathfrak{M}}'_\varkappa(M)$ gehört dem Inneren und dem Rand eines der Polygone Π_1 an, aus welchen der Durchschnitt von $B_\varkappa$ und Π besteht. Am Rande dieses Polygones sind jedenfalls zwei von $z=0$ ausgehende Strecken der beiden Randkurven von $B_\varkappa$ enthalten. Wir durchlaufen das Polygon Π_1 vom Punkte $z=0$ aus in einer der beiden Richtungen. Zunächst bewegen wir uns dabei auf dem Rande $L'_\varkappa$ von $B_\varkappa$, um alsdann längs einer Strecke von Π in das Innere von $B_\varkappa$ einzutreten. Nach Durchlaufung einer gewissen Zahl solcher Strecken von Π muß man wieder den Rand von $B_\varkappa$ treffen, da man ja längs einer Strecke von $L''_\varkappa$ in $z=0$ enden muß. Es kann sein, daß man erst noch einige Male $L'_\varkappa$ trifft und Teilstrecken dieser Kurve durchlaufen muß. Aber jedenfalls muß es einmal vorkommen, daß man längs einer Strecke von Π von $L'_\varkappa$ auf $L''_\varkappa$ hinüber geführt wird. Denn das Polygon Π verläuft ganz im Endlichen und man muß beim Durchlaufen von Π_1 schließlich auf $L''_\varkappa$ gelangen. Es gibt also auf dem Polygon Π einen Streckenzug, welcher $L'_\varkappa$ mit $L''_\varkappa$ verbindet und welcher im Innern von $B_\varkappa$ verläuft. Denn das Polygon Π_1 soll ja ein Teilbereich von $B_\varkappa$ sein, hat also außerhalb von $B_\varkappa$ weder innere noch Randpunkte. Damit ist der Querschnitt gefunden, auf dem $|f(z)| \geqq M$ ist, und der schon erwähnte Widerspruch zeigt, daß es in $\overline{B}_\varkappa$[6]) tatsächlich eine abgeschlossene zusammenhängende Teilmenge Z gibt, welche $z=0$ und $z=\infty$ enthält[7]). Daraus folgt, daß es in der Z umfassenden Menge $\mathfrak{M}(M+1)$ einen Teilbereich gibt, welcher die eben gefundene zusammenhängende Teilmenge enthält.

---

[6]) $\overline{B}_\varkappa$ besteht aus $B_\varkappa$ und den Randpunkten dieses Bereiches.

[7]) Das weitere Ziel der Betrachtung ist es nun, eine Jordankurve zu konstruieren, welche Null und Unendlich verbindet und auf welcher $f(z)$ beschränkt ist. Man darf dies aber nicht dadurch zu erreichen suchen, daß man zu beweisen versucht, daß es in jeder abgeschlossenen zusammenhängenden Menge eine zwei beliebige Punkte derselben verbindende Jordankurve gibt. Denn das ist im allgemeinen nicht richtig. Wohl aber könnte man für die spezielle hier vorliegende Menge $\overline{\mathfrak{M}}_\varkappa(M)$ den Nachweis führen. Man müßte dazu auf die Berandung der Menge $\overline{\mathfrak{M}}_\varkappa(M)$ eingehen, die ja von Bogen analytischer Kurven begrenzt wird. So könnte man eine Jordankurve gewinnen, welche Null und Unendlich verbindet und auf welcher $|f(z)| \leqq M$ ist. Der im Text eingeschlagene Weg scheint mir aber etwas rascher zum Ziel zu führen. Der dabei allerdings nur erzielte Nachweis einer Null und Unendlich verbindenden Jordankurve, auf welcher $f(z)$ beschränkt ist, genügt ja für unsere Zwecke vollkommen.

Um jeden endlichen Punkt von Z gibt es nämlich eine $\mathfrak{M}(M+1)$ angehörige Kreisscheibe von einem Radius $\leqq 1$. Aus diesen wählen wir eine ganz Z überdeckende Teilfolge aus, deren Mittelpunkte sich nur in $z=\infty$ häufen. Die aus diesen Kreisscheiben bestehende Menge ist ein Bereich. Denn man kann erstens jeden Punkt derselben in ihr mit einem Punkt von Z durch eine Strecke verbinden. Und zweitens gehören je zwei Punkte von Z einer zusammenhängenden Teilmenge von Z an. Diese entsteht aus Z durch Weglassen des unendlichfernen Punktes. Dadurch wird der Zusammenhang von Z nicht gestört, wie aus unserem Beweis hervorgeht.

In diesem Bereich $\mathfrak{M}^*(M+1)$ nehmen wir nun eine Punktmenge $z_0=0, z_1, \ldots,$ die gegen unendlich konvergiert. Man betrachte außerdem noch die Kreise $|z|=n$ ($n>0$, ganzzahlig). Nun verbinden wir $z=0$ mit z_1 irgendwie durch einen Polygonzug, der $\mathfrak{M}^*(M+1)$ angehört. Diesen Punkt verbinden wir dann mit einem anderen der Punkte $z_\varkappa$ durch einen Polygonzug so, daß folgende Bedingung erfüllt ist: Der Punkt und der verbindende Polygonzug sollen so gewählt werden, daß der kleinste vom Polygonzug getroffene Kreis $|z|=n$ einen möglichst großen Radius hat. Unter allen Punkten, die dieser Bedingung genügen, wählt man einen beliebig aus. Das sei z_2'. Nun betrachte man die Punkte $z_\varkappa$, deren Nummer größer ist als die, welche z_2' als Punkt dieser Folge hat und verbinde z_2' mit einem dieser Punkte durch einen Polygonzug wieder so, daß die eben genannte Bedingung erfüllt ist. Wenn man so fortfährt, erhält man einen Polygonzug, der $z=0$ mit $z=\infty$ verbindet, d. h. dessen Ecken sich im Endlichen nirgends häufen und der doch Punkte außerhalb eines jeden Kreises besitzt. Zum Beweis muß nur gezeigt werden, daß jeder Kreis $|z|=n$ nur in endlich vielen Punkten von dem Polygonzug getroffen wird. Der Kreis $|z|=n$ hat nämlich mit der Menge $\mathfrak{M}^*(M+1)$ nur endlich viele Kreisbogen gemein, da diese ja nur endlich viele Kreisscheiben enthält, welche $|z|=n$ treffen. Es seien n' solche Kreisbogen vorhanden. Ich brauche dabei nur auf diejenigen Polygonzüge $z_\varkappa' z_{\varkappa+1}'$ zu achten, deren Anfangs- und Endpunkt beide außerhalb von $|z|=n$ liegen. Ich denke mir einen solchen Polygonzug in der Richtung von $z_\varkappa'$ zu $z_{\varkappa+1}'$ durchlaufen, und bezeichne seinen ersten Eintrittspunkt in den Kreis $|z|=n$ mit $E_\varkappa$, falls ein solcher Punkt vorhanden ist. Wenn der Kreis $|z|=n$ von unendlich vielen der Polygonzüge getroffen werden sollte, so gibt es unendlich viele solche Punkte. Dann muß es auf mindestens einem der n' Bogen des Kreises mehrere geben. $E_{\varkappa_1}$ und $E_{\varkappa_2}$ $(\varkappa_1<\varkappa_2)$ seien zwei solche. Dann gibt einen Polygonzug, der $z_{\varkappa_1}'$ mit $E_{\varkappa_1}$ verbindet und der außerhalb des Kreises $|z|=n$ verläuft, und und ebenso gibt es einen Polygonzug, der $z_{\varkappa_2}'$ mit $E_{\varkappa_2}$ verbindet und der gleichfalls außer-

halb dieses Kreises verläuft. Der Bogen, welchem $E_{\varkappa_1}$ und $E_{\varkappa_2}$ angehören, liegt in einer der Kreisscheiben, aus welchen $\mathfrak{M}^*(M+1)$ besteht. Ich wähle auf jedem der beiden Züge je einen Punkt $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ im Innern dieser Kreisscheibe und verbinde sie in deren Innerem und außerhalb von $|z|=n$ durch einen Streckenzug. So erhalte ich einen außerhalb von $|z|=n$ verlaufenden Streckenzug $z'_{\varkappa_1}\varkappa_1\varkappa_2 z'_{\varkappa_2}$, welcher $z'_{\varkappa_1}$ mit $z'_{\varkappa_2}$ verbindet und der $|z|=n$ nicht trifft. Für diesen hat also der kleinste Kreis, welchen er trifft, eine größere Nummer als bei dem ursprünglich gewählten. Das aber widerspricht der Vorschrift, die für die Bestimmung der z'_i und der verbindenden Polygonzüge gegeben war.

Es gibt somit einen Polygonzug in $\overline{\mathfrak{M}}^*(M+1)$, welcher $z=0$ mit $z=\infty$ verbindet. Auf ihm ist $|f(z)|<M+1$. Es kann aber sein, daß die so gewonnene stetige Kurve nicht ganz dem Bereiche $B_\varkappa$ angehört. Dies aber kann nur in einer gewissen Umgebung von $z=0$ passieren. Denn die Kurve gehört $\overline{\mathfrak{M}}^*(M+1)$ an und die endlichen Punkte dieses Bereiches gehören alle dem Inneren von $B_\varkappa$ an, sofern nur der absolute Betrag ihrer Koordinaten hinreichend groß ist. Also gehört der Polygonzug von einer gewissen seiner Ecken z'_ν an, völlig dem Bereiche $B_\varkappa$ an. Diese Ecke kann man aber innerhalb $B_\varkappa$ mit $z=0$ durch einen neuen Polygonzug verbinden und so erhält man eine stetige in $B_\varkappa$ gelegene Kurve, welche $z=0$ mit $z=\infty$ verbindet, und auf ihr ist $|f(z)|$ beschränkt.

Zur weiteren Überlegung ersetze ich jede dieser Kurven durch einen von Selbstüberkreuzungen freien Polygonzug von 0 nach ∞, auf welchem $|f(z)|$ noch immer beschränkt ist. Dies gelingt einfach durch Weglassen der in den Polygonzügen etwa vorkommenden Schleifen.

So haben wir nun in jedem der n Bereiche $B_\varkappa$ eine Null und Unendlich verbindende Jordankurve $L_\varkappa$ gefunden, auf welcher $f(z)$ beschränkt ist.

4. Ich betrachte nun die ganzen Funktionen

$$\varphi_p(z)=\frac{(f(z)-f(0))^p}{z},$$

indem ich unter p irgendeine ganze positive Zahl verstehe. Sie haben auf den n Kurven $L_\varkappa$ den asymptotischen Wert Null.

Diese Funktionen haben alle dieselbe endliche Ordnung ϱ wie $f(z)$. Da wir also eine ganze Funktion der Ordnung ϱ gefunden haben, die mindestens einen endlichen asymptotischen Wert besitzt, so muß nach dem Carlemanschen Satz $\frac{\pi^2}{2}\varrho>1$ sein. Nehmen wir nun an, es sei $n\geqq\frac{\pi^2}{2}\varrho>1$. Dann müssen auf mindestens zweien dieser Wege unendlich

viele der $\varphi_p(z)$ denselben asymptotischen Wert haben. D. h. man muß diese beiden Wege durch Jordankurven miteinander verbinden können, auf welchen $\varphi_p(z)$ beliebig klein ist. Ich betrachte zuerst ein einzelnes p. In einem der beiden Bereiche, welche die beiden Jordankurven bestimmen, auf welchen es denselben asymptotischen Wert hat, muß $\varphi_p(z)$ gleichmäßig gegen Null gehen. Denn in mindestens einem derselben gibt es Querschnitte, welche seine beiden Ränder verbinden und auf welchen $|\varphi_p(z)|$ beliebig klein ist. In einem der beiden Bereiche streben daher unendlich viele der $\varphi_p(z)$ gleichmäßig gegen Null. D. h. für gewisse beliebig große p und für hinreichend große — von p abhängige z — ist in diesem Bereiche

$$\left| \frac{f(z)-f(0)}{z^{\frac{1}{p}}} \right| < \varepsilon, \tag{1}$$

wo $\varepsilon > 0$ eine beliebig gegebene Zahl bedeutet. Diesem Bereiche aber gehört eine der Kurven an, auf welchen $f(z)$ den asymptotischen Wert ∞ hat. Ich werde zeigen, daß dies mit dem eben gefundenen Sachverhalt nicht verträglich ist.

In den endlichen Randpunkten dieses Bereiches ist nämlich $f(z) - f(0)$ beschränkt, während zu unendlich vielen nach Null strebende Zahlen $\frac{1}{p}$ Umgebungen von ∞ gehören, in welchen (1) erfüllt ist. Nach einem bekannten Satze von Phragmén und Lindelöf[8]) folgt aber hieraus, daß $f(z)$ im ganzen Bereiche beschränkt ist. Es kann also auch nicht auf der ihm angehörigen Kurve $\mathfrak{C}$ den asymptotischen Wert Unendlich haben.

So hat die Annahme, daß die Zahl der verschiedenen asymptotischen Werte Unendlich einer ganzen Funktion der Ordnung ϱ mindestens $\frac{\pi^2}{2}\varrho > 1$ sein könne, zu einem Widerspruch geführt. Sie ist also kleiner als $\frac{\pi^2}{2}\varrho > 1$ und unser Satz ist bewiesen.

---

[8]) E. Phragmén et E. Lindelöf, Sur une extension d'un principe classique de l'analyse. Acta mathematica **31** (1908), S. 381–406.

(Eingegangen am 24. April 1924.)

Über die erste Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$.

Von

Tibor Radó und Friedrich Riesz in Szeged (Ungarn).

In Bd. 18 der Math. Zeitschrift hat Herr Perron „*Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für* $\Delta u = 0$“ veröffentlicht. In Bd. 20 hat dann Herr Remak in einer Arbeit *über potentialkonvexe Funktionen* eine Darstellung desselben Gegenstandes gegeben, wobei die Anwendung des Lebesgueschen Integrals, welches bei Herrn Perron eine wesentliche Rolle spielt, vermieden wird.

Wir teilen im folgenden ein Verfahren mit, welches gestattet, die nötigen Überlegungen vollständig im Bereiche der *stetigen* Funktionen durchzuführen; als wesentlichster Beweisgrund wird sich dabei der Harnacksche Satz über monotone Folgen harmonischer Funktionen herausstellen. Wir deuten ferner an, wie sich auch die weiteren Überlegungen des Herrn Perron durch eine Bemerkung, welche der eine von uns früher bei funktionentheoretischen Untersuchungen angewendet hatte[1]), vereinfachen lassen.

I.

In der komplexen z-Ebene ist ein Gebiet G mit dem Rande R vorgelegt, ferner ist auf R eine beschränkte Funktion f gegeben. Herr Perron definiert dann die zum Randwertproblem gehörenden *Oberfunktionen* auf die folgende Weise. Eine in $G + R$ stetige Funktion Φ heißt eine Oberfunktion, wenn sie die beiden Eigenschaften besitzt:

a) Am Rande R ist $\Phi \geqq f$.

b) Sei K eine in G enthaltene Kreisfläche, und $(\Phi)_K$ die Funktion, welche entsteht, wenn innerhalb K die Funktion Φ durch diejenige har-

[1]) F. Riesz, Sur les valeurs moyennes du module des fonctions harmoniques et des fonctions analytiques, Acta Litt. ac Sc. Univ. F. J., Szeged, T. I (1922), p. 27–32.

monische Funktion ersetzt wird, welche am Rande von K mit Φ übereinstimmt. Dann soll $\Phi \geqq (\Phi)_K$ sein, bei jeder Wahl von K.

Dann zeigt Herr Perron, daß die drei folgenden Tatsachen bestehen:

1. Die Funktionen Φ sind nach unten gleichmäßig beschränkt: $\Phi \geqq m$, wo m die untere Grenze der Randfunktion bedeutet.

2. Nimmt man endlich viele Oberfunktionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, so ist auch

$$\Phi = \mathrm{Min}\,[\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n]$$

eine Oberfunktion.

3. Sei K eine in G enthaltene Kreisfläche, und $(\Phi)_K$ bezeichne die Funktion, welche entsteht, wenn die Oberfunktion Φ innerhalb K durch diejenige harmonische Funktion ersetzt wird, welche am Rande von K mit Φ übereinstimmt. Dann ist auch $(\Phi)_K$ eine Oberfunktion, und es ist $\Phi \geqq (\Phi)_K$.

Nach 1. kann man dann eine Funktion U erklären, welche in jedem Punkte z gleich der unteren Grenze der Werte ist, welche die Oberfunktionen in diesem Punkte annehmen. Zu beweisen ist, daß die auf diese Weise in G eindeutig bestimmte Funktion U harmonisch ist. Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

A. Sei $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ eine beliebige abzählbare Punktmenge in G. Dann gibt es eine monotone Folge von Oberfunktionen: $\Phi_1 \geqq \Phi_2 \geqq \ldots \geqq \Phi_n \ldots$, welche auf dieser Punktmenge gegen U konvergiert.

In der Tat, nach der Erklärung von U gibt es, dem Punkte z_i entsprechend, eine Folge $\Phi_1^{(i)}, \Phi_2^{(i)}, \ldots$, welche im Punkte z_i gegen U konvergiert. Wir bilden nun die Funktion

$$\Phi_n = \mathrm{Min}\,[\Phi_k^{(i)}] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Dann ist Φ_n nach 2. eine Oberfunktion, also $\Phi_n \geqq U$; ferner gilt offenbar: $\Phi_1 \geqq \Phi_2 \geqq \ldots$. Fassen wir einen bestimmten Punkt z_i ins Auge, so haben wir für $n > i$:

$$\Phi_n^{(i)}(z_i) \geqq \Phi_n(z_i) \geqq U(z_i).$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \Phi_n^{(i)}(z_i) = U(z_i)$ folgt hieraus $\Phi_n(z_i) \to U(z_i)$.

B. Sei K eine in G enthaltene Kreisfläche, und $z_1, z_2, \ldots$ eine abzählbare Punktmenge in K. Dann gibt es eine in K harmonische Funktion u, welche auf dieser Punktmenge mit U übereinstimmt.

Nach A. können wir nämlich eine Folge von Oberfunktionen $\Phi_1 \geqq \Phi_2 \geqq \ldots$ bestimmen, welche auf dieser Punktmenge gegen U konvergiert. Die Folge von Oberfunktionen:

$$(\Phi_1)_K, (\Phi_2)_K, \ldots$$

ist dann ebenfalls monoton:

$$(\Phi_n)_K \geqq (\Phi_{n+1})_K .$$

Denn in allen Punkten, die nicht innerhalb K liegen, ist ja $\Phi = (\Phi)_K$. Am Rande von K gilt hiernach sicher die Ungleichung $(\Phi_n)_K \geqq (\Phi_{n+1})_K$, und folglich auch im Innern von K, weil diese Funktionen innerhalb K harmonisch sind. Da ferner nach 3. die Ungleichung

$$\Phi_n \geqq (\Phi_n)_K$$

gilt, so konvergiert auf der betrachteten Punktmenge auch die Folge $(\Phi_n)_K$ gegen U.

Wir betrachten nun die Folge $(\Phi_n)_K$ im Innern von K. Dieselbe konvergiert dort in den Punkten $z_1, z_2, \ldots$, ist ferner monoton und besteht aus harmonischen Funktionen; nach dem Harnackschen Satze konvergiert sie also überall in K, und zwar gegen eine in K harmonische Funktion u. In den Punkten $z_1, z_2, \ldots$ stimmen U und u überein, und damit ist B. bewiesen.

Aus B. schließen wir nun sofort, daß U harmonisch ist. Die Punkte $z_1, z_2, \ldots$ wählen wir so, daß sie in K überall dicht liegen; sei u die in K harmonische Funktion, welche in diesen Punkten mit U übereinstimmt. Dann ist, wie wir behaupten, $U = u$ überall in K. Ist nämlich ζ ein beliebiger Punkt in K, so gibt es nach B. eine in K harmonische Funktion $\bar{u}$, welche mit U in den Punkten $\zeta, z_1, z_2, \ldots$ übereinstimmt; $\bar{u}$ ist aber notwendig identisch mit u, weil ja diese Funktionen in den Punkten einer überall dichten Punktmenge einander gleich sind.

II.

Die Perronsche Herleitung der mit 1, 2, 3 bezeichneten Tatsachen kann durch die Bemerkung vereinfacht werden, daß es genügt, in b) die Ungleichung $\Phi \geqq (\Phi)_K$ *nur für den Mittelpunkt* von K zu fordern. Um uns einfacher ausdrücken zu können, definieren wir: Eine in $G + R$ stetige Funktion Φ soll im (inneren) Punkte z_0 *superharmonisch* heißen, wenn

$$(*) \qquad \Phi(z_0) \geqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(z_0 + \varrho e^{i\Theta})\, d\Theta$$

ist, für alle hinreichend kleinen Werte von ϱ. Dann sieht man leicht: ist Φ in jedem Punkte von G superharmonisch, so ist die Forderung b) des Herrn Perron erfüllt. Denn ist u die in K harmonische Funktion, welche am Rande von K mit Φ übereinstimmt, so ist $w = \Phi - u$ am Rande von K gleich Null, im Innern von K offenbar superharmonisch.

Wäre nun irgendwo in K die Ungleichung $w \geqq 0$ nicht erfüllt, so würde es einen inneren Punkt z_0 von K geben, in welchem w Minimum wird, ohne jedoch in der Umgebung dieses Punktes konstant zu sein; diese Annahme widerspricht aber der Voraussetzung (*). Die gleiche Überlegung ergibt auch allgemein, daß eine in einem Gebiete superharmonische Funktion am Rande Minimum wird[1]).

Es genügt hiernach festzustellen, daß durch die in 2. und 3. erklärten Operationen aus superharmonischen Funktionen wieder solche entstehen. Dies gelingt in einfachster Weise durch die Bemerkung: Ist Φ superharmonisch, Ψ stetig in G, ist ferner $\Psi \leqq \Phi$, so ist Ψ in allen solchen Punkten von G superharmonisch, in welchen das Gleichheitszeichen gilt. Ist nämlich z_0 ein solcher Punkt, so haben wir:

$$\Psi(z_0) = \Phi(z_0) \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(z_0 + \varrho e^{i\Theta})\, d\Theta \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(z_0 + \varrho e^{i\Theta})\, d\Theta .$$

Um nun etwa 3. zu zeigen, bemerken wir, daß $\Phi \geqq (\Phi)_K$ ist. Liegt der Punkt z_0 nicht in K, so ist $\Phi = (\Phi)_K$, also nach der obigen Bemerkung $(\Phi)_K$ superharmonisch in z_0; innerhalb K ist $(\Phi)_K$ sogar harmonisch.

Diese einfachen Betrachtungen können auch im weiteren Verlaufe der Perronschen Überlegungen vorteilhaft verwendet werden.

Szeged, den 19. Mai 1924.

(Eingegangen am 23. Mai 1924.)

Streckenkomplexe auf Flächen.

(Zweite Mitteilung.)

Von

Friedrich Levi in Leipzig.

Die in der 1. Mitteilung[1]) eingeführte Gruppe der „Arten“ der Komplexe $\bar{C}$ bietet sich als geeignetes Hilfsmittel, um topologische Farbenprobleme zu lösen. Hierzu gehören außer der Höchstfarbenzahl, die einer Fläche Φ bei Zerlegung durch Komplexe C oder $\bar{C}$ zukommt, auch die Beantwortung der Fragen: Welche topologischen Eigenschaften muß ein Streckenkomplex haben, damit der von ihm auf Φ bestimmten Teilung eine gewisse Farbenzahl zukommt? Und: Wie erhöht sich die Farbenzahl, wenn man an die Färbung noch gewisse Forderungen stellt?

Im folgenden wird das Farbenproblem der $\bar{C}$ auf der projektiven Ebene[2]) behandelt und in dem Sinne gelöst, daß die Farbenzahl in jedem Falle aus der Zerlegbarkeit der teilenden $\bar{C}$ in Komplexe gewisser „Art“ bestimmt wird (§ 2). Ebenso vollständige Ergebnisse werden für die (endlichen und unendlichen) $\bar{C}$ auf einigen offenen Flächen (Ebene, Zylinder usw.) erzielt. Bezüglich der n-fach punktierten Kugel wird nachgewiesen, daß die vollkommene Lösung dieses Problems die Entscheidung über das bekannte Vierfarbenproblem der Kugel in sich einschließt (§ 3). Die erzielten Resultate werden dann auf Zerlegungen mit Symmetrieeigenschaften (z. B. Periodizität) angewandt (§ 4) und gezeigt, wie die Farbenzahl sich ändert, wenn gefordert wird, daß entsprechenden Domänen dieselbe Farbe zukommt.

---

[1]) Streckenkomplexe auf Flächen, Math. Zeitschr. 16 (1923), S. 148–158, zitiert mit M. I.

[2]) D. h. dem geschlossenen Möbiusschen Band.

§ 1.

Allgemeine Sätze.

Zunächst müssen die anzuwendenden Begriffe etwas verallgemeinert werden. — Jede Fläche Φ wird repräsentiert durch einen zusammenhängenden Komplex von endlich oder abzählbar vielen Punkten[3]), Strecken und Flächenelementen. Jede Strecke wird dabei von zwei Punkten begrenzt und grenzt an zwei Flächenelemete. Jedes Flächenelement wird von einem Kreis von endlich vielen Strecken und (ebenso vielen) Punkten begrenzt, und es bilden die an einen beliebigen Punkt stoßenden Strecken und Flächenelemente einen — einzigen — Kreis. Zwei solche Komplexe repräsentieren *dieselbe Fläche*, wenn man sie durch elementare Unterteilung ihrer Strecken und Flächenelemente in jeweils endlich viele Teilelemente in denselben Komplex überführen kann. (Der Beweis der Transitivität, die erst diese Definition rechtfertigt, ergibt sich ohne weiteres aus der Transitivität der Verwandtschaft endlicher Komplexe.) Eine Fläche ist daher entweder nur durch endlich viele (*geschlossene* Fläche) oder durch abzählbar unendlich viele (*offene* Fläche) Elemente darstellbar. Ein Streckenkomplex auf einer Fläche ist ein Teilkomplex einer Unterteilung der Fläche. Es besteht daher ein Streckenkomplex C auf einer geschlossenen Fläche nur aus endlich vielen Strecken und Punkten. C bestimmt auf Φ eine Domänenteilung, wobei zwei Flächenelemente zur gleichen Domäne gerechnet werden, wenn man sie durch einen endlichen Flächenweg verbinden kann, ohne dabei C zu überschreiten. Mit $\bar{C}$ wird ein C bezeichnet, wenn an jeden Knotenpunkt eine gerade Anzahl von Strecken aus $\bar{C}$ angrenzen[4]).

Kann man den Domänen der von C bestimmten Teilung die *Farben* $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{\mu\}, \ldots$ zuteilen, so daß man durch Überkreuzen einer Strecke von C stets zu einer anderen Farbe gelangt, so heiße die Domänenteilung färbbar und die Mindestzahl der nötigen Farben ist die *Farbenzahl* $z(C)$; diese ist bei endlichem C stets endlich[5]). Die Domänenteilung ist dann und nur dann nicht färbbar, wenn eine Strecke von C nur eine Domäne begrenzt. Ist $z(C) = 2$, so kommt man von einer festen Domäne zu den gleich (bzw. entgegengesetzt) gefärbten nach Überkreuzung von einer geraden (bzw. ungeraden) Anzahl von Strecken. Eine geschlossene Kurve auf Φ, die durch keinen Knotenpunkt von C geht, muß dann also stets eine gerade Anzahl von Strecken von C überkreuzen.

[3]) Auch „Knotenpunkte“ genannt.

[4]) In M. I war außerdem verlangt, daß $\bar{C}$ endlich und zusammenhängend sein soll.

[5]) Auf offenen Flächen kann man unschwer unendliche C konstruieren, für die $z(C) = \infty$, aber doch die Domänenteilung färbbar ist.

Gilt das andererseits für alle derartigen geschlossenen Kurven, so ist $z(C) = 2$. Durch Umlaufung der einzelnen Knotenpunkte erkennt man, daß wenn $z(C) = 2$, der Komplex C ein $\bar{C}$ sein muß. Außerdem besteht dann C aus den Berandungen der Domänen $\{1\}$ also einer endlichen oder abzählbar unendlichen Gesamtheit von zu 0 homologen, voneinander unabhängigen[6]) Kurvensystemen. Ist umgekehrt C in dieser Weise zusammengesetzt, so überkreuzt jede geschlossene Kurve auf Φ jedes dieser Kurvensysteme gerade mal also $z(C) = 2$. Daher:

Satz 1: *Aus jeder der drei Bedingungen*: 1. $z(C) = 2$, 2. *jede geschlossene nicht durch Knotenpunkte von C gehende Kurve überkreuzt C gerade mal*, 3. *C besteht aus abzählbar vielen, unabhängigen zu* 0 *homologen Kurvensystemen — folgen die beiden andern. Es heißt unter diesen Bedingungen C „von der Art* 1"; $(C) = 1$; *auch ist dann C ein* $\bar{C}$.

Besteht C aus den voneinander unabhängigen Komplexen C_1 und C_2, so schreibe man:

$$C = C_1 + C_2 \quad \text{und} \quad C_1 = C - C_2.$$

Sind von diesen Komplexen zwei vom Typus $\bar{C}$, so ist es auch der dritte. Gibt es zu C und C' Komplexe C_1 und C_2, für die:

$$(C_1) = (C_2) = 1 \quad \text{und} \quad C + C_1 \equiv C' + C_2,$$

so sind C und C' „*von gleicher Art*", oder:

$$(C) = (C').$$

Für zusammenhängende endliche $\bar{C}$ stimmt diese Definition mit der in M. I überein. Der dort gegebene Satz 7 gilt mit seinem Beweis fast wörtlich für die neue erweiterte Definition. Es bilden die Arten also eine Abelsche Gruppe und:

$$(C_1 + C_2) = (C_1) \cdot (C_2), \qquad (C - C_2) = (C) \cdot (C_2), \qquad (C)^2 = 1.$$

Die Komplexe $\bar{C}$ bilden eine Untergruppe. Gleichartige C müssen dieselben Punkte mit ungeraden Grade haben. Alle $\bar{C}$, die von homologen Kurven oder Kurvensystemen durchlaufen werden können, sind gleichartig. Ferner gilt

Satz 2. $z(C_1 + C_2) \leqq z(C_1)$, *wenn* $z(C_2) \leqq z(C_1)$.

---

[6]) *Unabhängig* sind zwei Streckenkomplexe, wenn sie keine Strecke gemeinsam haben. — Für die offenen Flächen muß der Homologiebegriff so gefaßt werden, daß man auch Kongruenzen mit abzählbar unendlich vielen Summanden in Rechnung setzt; für berandete Flächen, die hier überhaupt nicht als Flächen zählen, gilt der Satz 1 nicht. Vgl. M. I, S. 151, Satz 4.

Beweis. Wie aus der Bezeichnungsweise ersichtlich, bestimmen C_1 und C_2 färbbare Teilungen und haben keine Strecke gemeinsam.

Die von C_1 bestimmte Teilung habe die Farben $\{\mu_1\}$, wobei $\mu_1 = 1, 2, \ldots, z(C_1)$.
„ „ C_2 „ „ „ „ „ „ $\{\mu_2\}$, „ $\mu_2 = 1, 2, \ldots, z(C_2)$,

Dann kann man die von $C_1 + C_2$ bestimmte Teilung mit den Farben $[\mu_1, \mu_2]$ färben. Ist nun $\mu \equiv \mu_1 + \mu_2 \pmod{z(C_1)}$ und $0 < \mu \leqq z(C_1)$, so kommt man durch Überschreiten einer Strecke auch zu einem andern μ; w. z. b. w.

Der Satz wird besonders in der Form $z(C_1 + C_2) \leqq z(C_1)$, wenn $(C_2) = 1$, angewandt. D. h. die Farbenzahl wird nicht vergrößert durch Hinzufügung eines Komplexes der Art 1. Sie kann dadurch aber sehr wohl herabgesetzt werden, oder eine nicht färbbare Teilung in eine färbbare übergehen. Ist z. B. $(C_1) \neq 1$ im übrigen C_1 willkürlich und wählt man C_2 aus lauter Streckenpaaren zusammengesetzt, die den einzelnen Strecken von C_1 so zugeordnet sind, daß sie die Endpunkte der zugeordneten Strecke verbinden und diese selbst in ein Flächenelement einschließen, so ist $z(C_1 + C_2) = 3$.

Satz 3. *Ist* $C = C_1 + C_2 + C_3$ *und* $(C_1) = (C_2) = (C) \neq 1$, *so ist* $3 \leqq z(C) \leqq 4$ *und umgekehrt.*

Beweis. Es sei $C = C_1 + C_2 + C_3$ und $(C_1) = (C_2) = (C) \neq 1$. Dann ist $(C_1 + C_2) = 1$, also $(C_3) = (C) = (C_2)$ und $(C_2 + C_3) = 1$. $C_1 + C_2$ und $C_2 + C_3$ bestimmen zweifarbige Teilungen $\{\mathrm{I}\}$, $\{\mathrm{II}\}$ bzw. $\{1\}$, $\{2\}$. Daher bestimmt C die vierfarbige Teilung $\{\mathrm{I}, 1\}$, $\{\mathrm{I}, 2\}$, $\{\mathrm{II}, 1\}$, $\{\mathrm{II}, 2\}$. Da $(C) \neq 1$, ist $z(C) > 2$. Also $3 \leqq z(C) \leqq 4$. Ist umgekehrt die durch C geteilte Fläche mit vier Farben $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$ gefärbt (wobei aber die vierte Farbe nicht vorzukommen braucht), so entsteht durch Unterdrückung der Grenzstrecken von $\{1\}$ mit $\{2\}$ und von $\{3\}$ mit $\{4\}$ eine zweifarbige Teilung; die übriggebliebenen Strecken bilden also einen $\bar{C}$, für den $(\bar{C}) = 1$. $C - \bar{C} = C_{\substack{12\\34}}$ und $(C_{\substack{12\\34}}) = (C)$; analog $(C_{\substack{13\\24}}) = (C_{\substack{14\\23}}) = (C)$ und $C = C_{\substack{12\\34}} + C_{\substack{13\\24}} + C_{\substack{14\\23}}$. Da ferner $(C) \neq 1$, wenn $z(C) > 2$, so ist Satz 3 mit Umkehrung bewiesen[7]).

Folgerung. „Ist $z(C) > 4$, oder existiert $z(C)$ nicht, so müssen Teile C' und C'' von C, für die $(C) = (C') = (C'')$, stets gemeinsame Strecken haben."

Solche $C', C'', \ldots, C^{(k)}, \ldots$ sind z. B. bei einer m-farbigen Teilung die Komplexe, die aus den Grenzstrecken der Farben $\{i_1\}, \ldots, \{i_\mu\}$ mit-

[7]) Für den Fall, daß C ein regulärer Komplex vom Grade 3 auf der Kugel ist, liefert Satz 3 die bekannte Äquivalenz zwischen dem Vierfarbensatz der Kugel und der Zerlegbarkeit dieses C in drei primitive Komplexe.

einander und der Farben $\{i_{\mu+1}\}, \ldots, \{i_m\}$ bestehen. Ferner bilden alle Strecken, die in $C', C'', \ldots, C^{(2\nu+1)}$ insgesamt ungerade mal vorkommen, wieder ein $C^{(\varkappa)}$, und ebenso die Strecken, die in $C', \ldots, C^{(2\lambda)}$ gerade mal (einschließlich null mal) vorkommen. Beachtet man ferner, daß zu jedem m ein C und eine Fläche Φ gefunden werden kann, so daß $z(C) = m$, so gelangt man zu der (kombinatorischen)

Folgerung. „Bildet man für $m > 4$ aus den Zahlen $1, 2, \ldots, m$ Zeilen von Zahlenpaaren nach folgenden Vorschriften, so haben stets zwei Zeilen mindestens ein gemeinsames Zeilenpaar. — Vorschriften: Aus jeder beliebigen Permutation $\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & m \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_m \end{pmatrix}$ und jedem $0 < \mu < m$ bilde die Zeile $\ldots (i_k, i_l) \ldots (i_\varkappa, i_\lambda) \ldots$ für alle $k \neq l$, k und $l < \mu$ und alle $\varkappa \neq \lambda$, $\varkappa$ und $\lambda \geqq \mu$; 2. aus beliebigen $2\nu + 1$ Zeilen nimm die Zahlenpaare (jedes einmal), die in diesen Zeilen insgesamt ungerade mal vorkommen, und bilde daraus eine neue Zeile; 3. verfahre entsprechend mit den Paaren, die in 2ν Zeilen insgesamt gerade mal (einschließlich 0 mal) vorkommen."

Versteht man nämlich unter (q, r) die Grenzstrecken der Farben q und r, so bildet jede Zeile einen zum Komplex aller Grenzstrecken C gleichartigen Komplex.

In § 3 wird von folgendem Hilfssatz Gebrauch gemacht werden:

Hilfssatz. *Auf einem beliebigen zusammenhängenden C kann man entweder je zwei beliebige verschiedene Punkte 0 und m durch mindestens zwei unabhängige Streckenzüge verbinden, oder es gibt eine Strecke s, so daß $C - s$ in zwei getrennte Komplexe zerfällt, von denen der eine 0, der andere m enthält.*

Beweis. Es sei C ein Streckenkomplex, dessen Zusammenhang nicht durch Wegnahme einer einzelnen Strecke zerstört werden kann. Es wird gezeigt, daß zu jedem doppelpunktfreien Streckenzug es einen davon unabhängigen gibt, der dieselben Endpunkte verbindet. Das ist richtig für Streckenzüge, die nur aus einer Strecke bestehen. Induktionsannahme: es sei richtig für alle Streckenzüge, die aus $\mu < m$ Strecken bestehen; dagegen gebe es keinen von $(0, 1, \ldots, m)$ unabhängigen Streckenzug, der 0 und m verbindet, wobei $0, 1, \ldots, m$ lauter verschiedene Punkte sein sollen und $(0, 1, \ldots, m) = (0, \ldots, i) + (i, \ldots, m)$ für jedes i geschrieben wird. Dann gibt es einen von $(1, \ldots, m)$ unabhängigen Streckenzug, der 1 und m verbindet, und zwar auch einen doppelpunktfreien $[1, m]$. Wäre $(0, 1)$ Teilstrecke von $[1, m]$, so wäre $[1, m] - (0, 1)$ eine von $(0, 1, \ldots, m)$ unabhängige Verbindung von 0 und m; folglich ist $[1, m]$ von $(0, 1, \ldots, m)$ unabhängig. Es kann daher keine Verbindung von 0

mit Punkten von $[1, m]$ geben, die keine Strecke von $(0, 1, \ldots, m)$ enthält. Da C nach Wegnahme von $(0, 1)$ nicht zerfällt, muß es einen von $(0, 1)$ unabhängigen Streckenzug geben, der 0 und m verbindet. Dieser treffe die Folge der Punkte $1, 2, \ldots, m$ zum ersten Mal in i. Der Anfang: $\{0, i\}$ des Streckenzuges kann dann $[1, m]$ nicht treffen; dann müssen aber — entgegen der Annahme — $\{0, i\} + (i, \ldots, m)$ und $(0, 1) + [1, m]$ unabhängige Streckenzüge sein, die 0 und m verbinden.

§ 2.

Farbenprobleme der projektiven Ebene.

$\bar{C}$ zerlege die projektive Ebene n-farbig. Es soll zuerst gezeigt werden, daß $n \leqq 4$ ist.

Zunächst gibt es auf der projektiven Ebene nur zwei Arten 1 und a von Komplexen $\bar{C}$ (nach M. I, Satz 8). Ist nun $z(\bar{C}) > 4$, so ist $(\bar{C}) = a$; es gibt aber keine unabhängigen Teilkomplexe, für die $(\bar{C}_1) = (\bar{C}_2) = a$. Unter der Annahme $z(\bar{C}) > 4$ wird eine Folge von Reduktionen von $\bar{C}$ ausgeführt. Bei jeder Reduktion bleibt die Domänenteilung färbbar und die Farbenzahl verringert sich nicht. Dann wird gezeigt, daß diese Reduktionen zu einem Widerspruch mit $z(\bar{C}) > 4$ führen müssen. Stoßen zunächst $2m > 4$ Strecken (in zyklischer Folge bezeichnet mit: $1, 2, 3, \ldots$) an P an, so läßt sich beweisen, daß die Winkelräume $(1, 2)$ und $(4, 5)$ zu verschiedenen Domänen gehören. Denn andernfalls liegen sie an einem Rande R, der durch den Punkt P in zwei geschlossene, sich nicht überkreuzende Bogen zerlegt wird, von denen mindestens der eine — B — von der Art 1 ist und keinen Teilbogen von der Art a haben kann (da $z(\bar{C}) > 4$). Liegen nun 1 und 2 (oder 4 und 5) auf B, so trennt B die Winkelräume $(1, 2)$ und $(4, 5)$; diese gehören also zu verschiedenen Domänen. Liegen aber 2 und 4 (bzw. 1 und 5) auf B, so überkreuzt $\bar{C} - R$ den zu 0 homotopen Bogen B in P ungerade mal, muß also B in noch einem Punkte überkreuzen, also in die von R berandete Domäne eindringen, was unmöglich. Ebensowenig können 1 und 4 (oder 2 und 5) auf B liegen, da sich B und $R - B$ nicht überkreuzen. Es gehören die Winkelräume also zu verschiedenen Domänen. Die Teilung bleibt daher färbbar, wenn man den Knotenpunkt P in P' und P'' spaltet, wobei an P' die Strecken $1, 2, 3, P'P''$ und an P'' die Strecken $P''P', 4, 5, \ldots, 2m$ angeheftet sind; die Farbenzahl wird dadurch nicht herabgesetzt. Man kann daher $\bar{C}$ so reduzieren, daß an keinen Punkt mehr als 4 Strecken angrenzen. Die Knotenpunkte mit 2 Strecken kann man durch interne Transformation (Streckenverschmelzung) beseitigen. Dadurch kann aber der Fall eintreten, daß Strecken nur an 1 oder 0 Knotenpunkte angrenzen. Jede solche Strecke s ist geschlossen. Ist $(s) = a$,

so ist $(\bar{C} - s) = 1$; $\bar{C} - s$ hat keinen Teilkomplex von der Art a und hat mit s höchstens einen Punkt gemeinsam. Man kann also die beiden Seiten von s verbinden, ohne $\bar{C} - s$ zu überkreuzen; die Domänenteilung ist also nicht färbbar. Ist aber $(s) = 1$, so bleibt die Teilung färbbar und die Farbenzahl wird nicht verringert, wenn man s und alle im Innern von s gelegenen Strecken (d. i. ein Komplex der Art 1) wegläßt. Aus dem gleichen Grunde kann man alle Teilkomplexe fortlassen, die in einem Flächenelement liegen und mit dem übrigen Komplex nicht zusammenhängen. Der so reduzierte $\bar{C}$ ist regulär vom Grade 4 und hat nur einfach berandete Domänen mit höchstens punktweisen Singularitäten. Dann gelten die Formeln

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

(Eulersche Formel für die proj. Ebene)

und

$$4\,\alpha_0 = 2\,\alpha_1 = \sum_{i=1}^{\alpha_2} k_i\,,$$

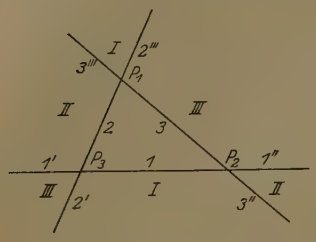
wobei $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ die Anzahlen der Punkte, Strecken und Domänen und k_i die Seitenzahl der i-Domäne ist. Folglich ist

$$\sum_{i=1}^{\alpha_2} (k_i - 4) < 0\,.$$

Es gibt also mindestens eine Domäne mit weniger als 4 Ecken. Sind 1, 2 die Seiten eines Zweiecks, das in P mit den Strecken $1'$, $2'$ zusammenstößt, so bleibt die Teilung mit der selben Farbenzahl färbbar, wenn man den Knotenpunkt P so auflöst, daß das Zweieck mit dem Winkelraum $(1', 2')$ verschmolzen wird. Bei einem Dreieck Δ ist die entsprechende Reduktion nur dann möglich, wenn (s. Figur) der Winkelraum $(1', 2')$ nicht der längs 3 zu Δ benachbarten Domäne angehört. Es wird jetzt gezeigt, daß, wenn $z(\bar{C}) > 4$, die Reduktion von irgendeiner Ecke her stets möglich sein müßte. Würden nämlich zu den längs 1, 2 und 3 zu Δ benachbarten Domänen I, II und III auch stets die gegenüberliegenden Winkelräume gehören, so wären diese Domänen paarweise benachbart, also wegen der Färbbarkeit der Teilung auch verschieden. Ferner sind die Domänen bereits als einfach berandet vorausgesetzt. Würde nun die Berandung von I in der Reihenfolge[8]) $3''$, 1, $2'$, b_2, $2'''$, $3'''$, b_3, $3''$ durchlaufen (b_2 und b_3 unabhängige Streckenzüge auf $\bar{C}$), so wären 2, $2'$, b_2, $2'''$, 2 und 3, $3'''$, b_3, $3''$, 3 geschlossene Kurven, die sich nur in P_1 überkreuzen, also beide von der Art a, entgegen der Annahme $z(\bar{C}) > 4$. Der Rand von I kann also nur sein: $3''$, 1, $2'$, b_2, $3'''$, $2'''$, b_3, $3''$. Dieser Streckenzug ist von der Art 1;

[8]) Der Übersichtlichkeit halber sind die geschlossenen Streckenfolgen so geschrieben, daß das erste Glied am Schlusse wiederholt wird.

Ebenso der Streckenzug: $3''$, 3, 2, $2'$, b_2, $3'''$, $2'''$, b_3, $3''$. Da dieser nicht in zwei Streckenzüge der Art a zerfallen kann, ist jeder geschlossene Teilstreckenzug von der Art 1; also auch $\Sigma = 2, 2', b_2, 3''', 2$. Aus der entsprechenden Betrachtung der Domäne III kann man schließen, daß ein Streckenzug $\Sigma' = 1, 3, 2''', c_1, 1', 1$ auf $\bar{C}$ besteht. Beide überkreuzen sich in P_3, müssen sich aber, da $(\Sigma) = 1$, noch einmal überkreuzen. Das müßte auf $2' b_2 3'''$ erfolgen, also Σ' in das Innere von I eindringen, was unmöglich. Man kann also die Reduktion unbeschränkt fortführen und die Zahl der Domänen unbegrenzt vermindern im Gegensatz zur Voraussetzung $z(\bar{C}) > 4$. Folglich:



Satz 4. *Ist* $(\bar{C}) = a$, *aber* $\bar{C}$ *nicht so in* $\bar{C}_1 + \bar{C}_2 + \bar{C}_3$ *zerlegbar, daß* $(\bar{C}_1) = (\bar{C}_2) = a$, *so ist die Domänenteilung nicht färbbar.*

Die Unterscheidung der Fälle $z(\bar{C}) = 3$ und $z(\bar{C}) = 4$ liefert

Satz 5. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für* $z(\bar{C}) = 3$ *ist, daß* $\bar{C} = \bar{C}_1 + C_2 + \bar{C}_3 + \bar{C}_0$, *wobei* $(\bar{C}) = (\bar{C}_1) = (\bar{C}_2) = (\bar{C}_3) = a$ *und* $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\bar{C}_3$ *zusammenhängende Komplexe sind, die durch einen Punkt gehen.*

Zuerst wird bewiesen, daß die Bedingung hinreicht. Dazu wird eine Folge von Reduktionen von $\bar{C}$ vorgenommen, bei denen die Voraussetzungen erhalten bleiben, die Farbenzahl nicht erniedrigt wird, wohl aber die Zahl bzw. der Grad der Knotenpunkte. Es wird gezeigt, daß man mit diesen Reduktionen so lange fortfahren kann, bis nur der in der Voraussetzung verlangte Knotenpunkt P vom Grade 6 übrig bleibt. Dann ist die projektive Ebene in drei Zweiseite mit singulärer Ecke zerlegt, also $z(\bar{C}) = 3$. Die Reduktionen: Zunächst kann man $\bar{C}_0$ weglassen. Dann durchlaufe man $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\bar{C}_3$ einzeln ohne Überkreuzung (vgl. M. I. Satz 1). Löst man dann einen Selbstberührungspunkt auf, so bleibt die Färbbarkeit erhalten (wegen Satz 3) und die Farbenzahl wird nicht erniedrigt, auch dann nicht, wenn durch diesen Selbstberührungspunkt ein anderes $\bar{C}_i$ hindurchgeht. (Durch die umgekehrte Operation entstehen nämlich keine neuen Nachbarschaften; es wird also durch sie die Farbenzahl nicht erhöht.) Ebenso kann man Berührungspunkte zweier verschiedener $\bar{C}_i$ auflösen. Man kann also — ohne die Farbenzahl zu erniedrigen — $\bar{C}$ in $\bar{C}' = \bar{C}_1' + \bar{C}_2' + \bar{C}_3'$ reduzieren, wobei die Summanden doppelpunktfreie Kurven von der Art a sind, die durch P gehn und in allen etwaigen andern Schnittpunkten sich gegenseitig überkreuzen. Es kommt also in $\bar{C}'$ kein Knotenpunkt von höherem Grade als 6 vor. Bei der weiteren Reduktion

etwa auftretende Berührungspunkte außerhalb P und Selbstschnittpunkte löse man immer sofort auf. Knotenpunkte vom Grade 4 zerfallen dabei in zwei von Grade 2, Knotenpunkte vom Grade 6 in drei vom Grade 2 oder zwei vom Grade $\leqq 4$. Ist P' ein Überkreuzungspunkt von $\bar{C}_1'$ und $\bar{C}_2'$, so zerlegen P und P' die Kurven $\bar{C}_1'$ und $\bar{C}_2'$ in $1+1'$ und $2+2'$. Dabei kann man die Bezeichnung so wählen, daß 1 und $2'$ homotop sind und folglich auch $1'$ und 2. Dann ist, wenn man $1+2=\bar{C}_1''$ und $1'+2'=\bar{C}_2''$ setzt: $(\bar{C}_1'')=(\bar{C}_2'')=a$. Sieht man von P ab, so überkreuzen sich $\bar{C}_1''$, $\bar{C}_2''$, $\bar{C}_3'$ nur in solchen Punkten, in denen sich $\bar{C}_1'$, $\bar{C}_2'$, $\bar{C}_3'$ gegenseitig überkreuzen. In P' überkreuzen sich $\bar{C}_1''$ $\bar{C}_2''$ nicht. Die Überkreuzungen außerhalb P können also durch Reduktion beseitigt und mithin zuerst die Knotenpunkte vom Grade 6 (ausgenommen P), dann die vom Grade 4 aufgelöst werden. Die Reduktion führt also zum angegebenen Ziel.

Ist umgekehrt $z(\bar{C})=3$, so geht man von einer 3-Färbung aus und reduziert dann so, daß 1.) weder $(\bar{C})$ noch die tatsächlich vorkommende Farbenzahl geändert wird [also auch nicht $z(\bar{C})$], 2.) jedem Tripel $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$, das den Bedingungen des Satzes 5 genügt und im reduzierten Komplex vorkommt, auch ein solches Tripel im nicht reduzierten Komplex entspricht. Es wird nun gezeigt, daß man durch eine Kette von Reduktionen zu einem Komplex gelangt, der sich in der verlangten Weise zerlegen läßt.

Zunächst erreicht man durch Reduktion, daß um jeden Knotenpunkt herum die drei Farben zyklisch aufeinanderfolgen. Ist das nämlich nicht der Fall, dann müssen die Farben an einem Punkt in der zyklischen Folge $\{1\}, \{2\}, \{1\}$ auftreten. Die Verschmelzung der beiden mit $\{1\}$ gefärbten Winkelräume ist dann eine Reduktion mit den verlangten beiden Eigenschaften. Diese Reduktion soll nach allen weiteren Schritten immer bei Bedarf vorgenommen werden. Es sind dann an jeden Knotenpunkt (von höherem Grade als 2) $6m$ Strecken angeheftet. Wo $m>1$, kann man den ersten Winkelraum mit dem siebenten verschmelzen, was wieder eine zulässige Reduktion ist. Es können also alle Knotenpunkte vorausgesetzt werden als vom Grade 6 und die drei Farben in der zyklischen Folge $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}$ um sie geordnet. Geschlossene Kurven, die durch keinen Knotenpunkt gehen, sind homotop 0; sie werden mit allen Strecken, die etwa in dem jeweils von ihnen berandeten Flächenelement liegen, weggelassen. Man bezeichne nun die Strecken mit

$$[1], \qquad [2], \qquad [3],$$

je nachdem sie

mit $\{2\}$ und $\{3\}$, oder mit $\{3\}$ und $\{1\}$, oder mit $\{1\}$ und $\{2\}$

gefärbte Domänen trennen. Die Strecken $[i]$ bilden dann jeweils ein System von doppelpunktfreien Kreisen ohne Schnittpunkte. Jeder dieser

Kreise, der nicht von der Art a ist, ist homotop 0 und begrenzt also ein Flächenelement ε. Die in ε liegenden Strecken des reduzierten $\bar{C}$ bilden einen $\bar{C}'$ von der Art 1. An ε können nur Domänen von den Farben $\neq \{i\}$ angrenzen. Es ist daher eine zulässige Reduktion, wenn man $\bar{C}'$ (das keine leere Menge sein kann) beseitigt und ε mit $\{i\}$ färbt. Durch Fortsetzung dieses Reduktionsverfahrens erhält man nach endlich vielen Schritten drei Kreise [1], [2], [3], die durch einen Punkt gehen und von der Art a sind, w. z. b. w.

Nachdem die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt sind, daß $z(\bar{C}) = 2, 3, 4$, oder die projektive Ebene nicht färbbar ist, soll noch gezeigt werden, daß man für $z(\bar{C}) = 4$ die Färbung so wählen kann, daß eine der vier Farben nur einer einzigen Domäne zukommt. Diese Eigenschaft folgt aus dem

Hilfssatz. *Ist auf der projektiven Ebene* $z(\bar{C}) = 4$, *so kann man* $\bar{C} = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 + \bar{C}_3 + \bar{C}_0$ *so zerlegen, daß* $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\bar{C}_3$ *jeweils zusammenhängend und von der Art a ist und es außerdem eine Domäne D gibt, die an* $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ *und* $\bar{C}_3$ *angrenzt.*

Gibt es nämlich eine solche D, dann kann man einen ihrer inneren Punkte durch Zweiecke mit $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\bar{C}_3$ verbinden und erhält dadurch eine dreifarbige Teilung. Dann schalte man die Zweiecke wieder aus und erteile D die aufgesparte Farbe.

Beweis des Hilfssatzes. Zunächst sei angenommen $\bar{C} = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 + \bar{C}_3$, wobei $(\bar{C}_1) = (\bar{C}_2) = (\bar{C}_3) = a$ und jedes $\bar{C}_i$ zusammenhängend sein soll. $\bar{C}_1 + \bar{C}_2$ ist dann auch zusammenhängend und bestimmt daher in der projektiven Ebene eine Teilung in einfach berandete Domänen. $\bar{C}_3$ muß $\bar{C}_1$ und $\bar{C}_2$ schneiden, kann aber — da $z(\bar{C}) = 4$ — nach Satz 5 durch keinen Schnittpunkt von $\bar{C}_1$ mit $\bar{C}_2$ hindurchgehen. $\bar{C}_3$ muß also mindestens eine Domäne D' so durchkreuzen, daß es eine Strecke von $\bar{C}_1$ mit einer von $\bar{C}_2$ verbindet. D' wird dadurch in D_1 und D_1' geteilt, wobei D_1 Strecken von $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$ auf seinem Rande hat und außerdem einen Eckpunkt P, in dem Randstrecken aus $\bar{C}_1$ und $\bar{C}_2$ aneinanderstoßen. Durchläuft man nun $\bar{C}_3$, so soll immer die Teildomäne von $D_i (i = 1, 2, \ldots)$, auf deren Rand P liegt, mit D_{i+1} bezeichnet werden. Nach vollständiger Durchlaufung von $\bar{C}_3$ gelangt man so zu $D_m = D$, einer Domäne der von $\bar{C}$ hervorgerufenen Teilung, die an $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ und $\bar{C}_3$ angrenzt. Im allgemeinen Fall, wenn $z(\bar{C}) = 4$, kann man $\bar{C} = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 + \bar{C}_3 + C_0$ setzen, wobei C_1, C_2, C_3 jedes von der Art a und zusammenhängend ist und $\bar{C}_0$ mit keinem anderen $\bar{C}_i$ einen Punkt gemeinsam hat. Die zusammenhängenden Bestandteile von C_0 liegen also ganz im Innern von Domänen, die von $C_1 + C_2 + C_3$ berandet werden. Es gibt daher auch unter den

von $\bar{C}$ berandeten Domänen eine, die an $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\bar{C}_3$ angrenzt. Nach der obigen Bemerkung folgt aus dem Hilfssatz:

Satz 6. *Ist auf der projektiven Ebene* $z(\bar{C}) = 4$, *so kann man die Färbung so vornehmen, daß eine der vier Farben nur einer einzigen Domäne zukommt.*

§ 3.

Farbenprobleme auf punktierten Flächen.

Es sei D eine Domäne auf Φ, die $n \geqq 1$ getrennte Ränder hat und aus endlich vielen Flächenelementen zusammengesetzt ist, und es liege kein Knotenpunkt eines gewissen Komplexes $\bar{C}$ auf der Berandung von D. Aus $\bar{C}$ wird durch D ein endlicher Komplex C' ausgeschnitten; ein solcher kann Knotenpunkte ungeraden Grades nur in gerader Anzahl enthalten, diese liegen aber nur auf den Rändern von D und sind die Punkte, in denen $\bar{C}$ die Ränder von D überkreuzt. Für $n = 1$ folgt daraus, daß der Rand in einer geraden Anzahl von Punkten überkreuzt wird, für $n = 2$, daß entweder beide Ränder in einer geraden, oder beide in einer ungeraden Anzahl von Punkten überkreuzt werden. Gibt es auf einem Komplex C in D keinen Streckenzug, der den Rand r_1 von D mit irgendeinem der anderen Ränder $r_2, \ldots, r_n$ von D verbindet, so gibt es unter den von C auf D bestimmten Teildomänen eine, die r_1 von $r_2, \ldots, r_n$ trennt. Gibt es nun auf C' einen solchen Streckenzug, nicht aber zwei unabhängige, so ist die Domänenteilung nicht färbbar. Um das einzusehen, braucht man nur den (nicht auf Φ gelegenen) Komplex C^* zu betrachten, der entsteht, wenn man alle an r_1 anstoßenden Strecken an einen Punkt 0, alle an $r_2, \ldots, r_n$ anstoßenden Strecken an m anheftet. C^* enthält dann einen zusammenhängenden Teilkomplex, der 0 und m verbindet; nach dem Hilfssatz des § 1 zerfällt dieser, wenn man eine gewisse Strecke s fortläßt, und zwar so, daß 0 und m getrennt werden. Dann zerfällt aber auch $C' - s$, so daß r_1 von $r_2, \ldots, r_n$ getrennt ist, und bestimmt in D eine Domänenteilung, in der eine Domäne D^0 den Rand r_1 von den anderen Rändern trennt. s verbindet dann zwei verschiedene Ränder von D^0, durchquert also D^0, ohne es zu zerlegen, ist also aus D^0 von beiden Seiten her erreichbar. Also ist die von C' auf D und infolgedessen auch die von $\bar{C}$ auf Φ bestimmte Teilung nicht färbbar.

Ist r_1 von den anderen Rändern durch genau μ_1 unabhängige Streckenzüge getrennt, so erkennt man leicht durch vollständige Induktion, daß durch Beseitigung von μ_1 geeignet gewählten Strecken der Rand r_1 isoliert werden kann. Es gibt dann eine Domäne, die r_1 von den anderen Rändern trennt und auf ihr einen Kreis der r_1 umschließt und C' nur bei

Überkreuzung dieser μ_1 Strecken trifft. Es ist also μ_1 nicht nur die Höchstzahl der voneinander unabhängigen Streckenzüge, die r_1 mit den anderen Rändern verbinden, sondern zugleich das Minimum der Schnittpunkte, die A' mit einem Kreise haben muß, der r_1 von den anderen Rändern trennt und durch keinen Knotenpunkt von C' geht. μ_1 soll der *Grad* von r_1 heißen. Von einem beliebig ausgewählten System von μ_1 unabhängigen Streckenzügen, die r_1 mit den anderen Rändern verbinden, sollen $\mu_{1,k}$ am Rande r_k münden. Beseitigt man diese μ_1 Streckenzüge, so habe im Restkomplex der Rand r_k den Grad μ_k', in C' den Grad $\mu_k = \mu_{1,k} + \mu_k'$; da ferner $\mu_1 = \sum_{k=2}^{n} \mu_{1,k}$, folgt

$$\mu_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \mu_k' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \mu .$$

Für $n = 2$ ist $\mu = \mu_1 = \mu_2$ gleich der Anzahl der unabhängigen Streckenzüge, die verschiedene Ränder paarweise verbinden. Durch vollständige Induktion erhält man aus der obigen Formel, daß μ immer diese Bedeutung hat.

Ein System von μ unabhängigen die Ränder verbindenen Streckenzügen kann man noch dadurch vereinfachen, daß man die Doppelpunkte der einzelnen Streckenzüge stets durch Ablösen der geschlossenen Bestandteile beseitigt und die gegenseitigen Überkreuzungspunkte durch verändertes Zusammensetzen (vgl. § 2 Bew. v. Satz 5) in Berührungspunkte verwandelt. Es gilt daher

Satz 7. *Schneidet eine aus endlich vielen Flächenelementen bestehende Domäne D von Φ mit $n \geqq 1$ getrennten Rändern aus C den Komplex C' aus, so ist $C' = C_D + C_1 + \ldots + C_\mu$. Hierbei sind $C_1, \ldots, C_\mu$ doppelpunktfreie sich gegenseitig nicht überkreuzende Streckenzüge, die die Ränder paarweise verbinden und von denen je μ_i (Grad von r_i) an dem Rand r_i münden, $\mu = \frac{1}{2}\Sigma\,\mu_i$, und C_D ist ein Komplex, auf dem man keine zwei verschiedenen Ränder von D verbinden kann.*

Die Farbenzahl $z(C')$ von D ändert sich nicht, wenn man die Ränder in Punkte zusammenzieht; $z(C')$ kann nur dann $= 2$ sein, wenn alle μ_i gerade sind; gibt es ein $\mu_i = 1$, so sind D und Φ nicht färbbar. Ist D eine n-fach berandete Kugel, so ist $z(C_D) = 2$, also $z(C')$ nicht größer als die Farbenzahl einer gewissen Teilung der Kugel mittels n Punkten vom Grade $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Ist also

D eine zweifach berandete Kugel, so ist

für	$\mu = 1$,	D nicht färbbar,
für	$\mu \equiv 0 \pmod 2$,	$z(C') = 2$,
für	$1 < \mu \equiv 1 \pmod 2$,	$z(C') = 3$;

) eine dreifach berandete Kugel, so ist

für μ_1 oder μ_2 oder $\mu_3 = 1$, D nicht färbbar,
für $\mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \mu_3 \equiv 0 \pmod 2$, $z(C') = 2$,
für $\mu_1 \equiv 0$, $\mu_2 (> 1) \equiv \mu_3 (> 1) \equiv 1 \pmod 2$, $z(C') = 3$.

Aus den geschlossenen Flächen werden nun durch „Punktierung" in olgender Weise offene Flächen hergestellt: Man schneidet ein Flächen-lement aus und setzt dafür eine abzählbar unendliche Folge von inein-ndergehefteten Ringdomänen (d. h. zweifach berandeten Kugeln) ein. Die neinanderheftung soll dabei so erfolgen, daß jede Ringdomäne mit einem anzen Rand an den noch freien Rand der vorangegangenen angeschlossen vird. Dann sind die aus Φ durch n-fache Punktierung entstehenden lächen Φ_n (bei festem n) homöomorph. Aus der Kugel K entsteht so ie *Ebene* K_1 und der *Zylinder* K_2. Die Folgen ineinandergehefteter ingdomänen, die man paarweise durch elementare Unterteilung und Weg-assen von endlich vielen Flächenelementen in denselben Flächenkomplex berführen kann, definieren einen *Pol*. Φ_n hat also n Pole $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. eder Rand von diesen Ringdomänen *umschließt* den zugehörigen Pol[9]). eder zusammenhängende Streckenzug $\Sigma' = s_1, s_2, \ldots, s_\nu, \ldots$ von unend-ich vielen Strecken, die alle verschieden sind, muß unendlich viele Ring-omänen überqueren. Da aber Σ' jede Ringdomäne nur endlich oft über-ueren kann, darf Σ' nur von einem Pol unendlich viele Ringdomänen berqueren. Σ' *konvergiert* nach diesem Pol. Da Σ' durch jeden Punkt ur endlich oft hindurchgeht, kann man auf Σ' einen zusammenhängenden oppelpunktfreien Teilstreckenzug Σ konstruieren, der vom selben Anfangs-unkt ausgehend gegen denselben Pol konvergiert. Gibt es zwei Strecken-züge Σ_1 und Σ_2, die von P ausgehend nach α_1 und α_2 konvergieren, so können diese nur endlich viele Punkte gemeinsam haben. Man kann daher us ihnen durch Weglassen endlich vieler Strecken eine doppelpunktfreie eiderseits unendliche Doppelfolge

$$\bar{\Sigma} = \ldots, \sigma_{-k}, \ldots, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_l, \ldots$$

ilden, die α_1 und α_2 verbindet.

Es liege $\bar{C}$ auf Φ_n und $r_i^1, r_i^2, \ldots, r_i^m, \ldots$ seien (für $i = 1, 2, \ldots, n$) ie Ränder der ineinanderliegenden Ringdomänen, die bei der i-ten Punk-ierung eingeführt werden.

$$r_1^m, r_2^m, \ldots, r_n^m$$

egrenzen die n-fach berandete Domäne D_m $(m = 1, 2, \ldots)$.

[9]) Auf K_1 umschließt jeder singularitätenfreie Kreis den Pol; auf K_2 umschließt eder Kreis, der α_1 umschließt, zugleich α_2.

Der Grad von r_i^m in D_m bezüglich $\bar{C}$ sei μ_i^m. Dann ist

$$\mu_i^m \geqq \mu_i^{m+1} \geqq \ldots \geqq 0$$

eine ganzzahlige monoton abnehmende Folge. Es gibt also ein N, so daß für alle i, wenn $k > 0$, $\mu_i^N = \mu_i^{N+k} = \mu_i$. Das ist der *Grad von* α_i.

Ist $\mu_i = 0$, so gibt es einen Kreis, der α_i von den übrigen α_k trennt[10] und $\bar{C}$ nicht trifft. Zu einem Komplex $\bar{C}^0$, für den $\mu = \frac{1}{2}\Sigma\mu_i = 0$, gibt es entsprechend n Kreise $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$, welche die Pole isolieren und $\bar{C}$ nicht treffen. Diese Kreise zerlegen Φ_n in eine n-fach berandete endliche Domäne D und n einfach berandete punktierte Domänen. Entsprechend zerfällt $\bar{C}^0$ in $\bar{C}^0 = \bar{C}_D + \bar{C}_1 + \ldots + \bar{C}_n$, wobei $\bar{C}_D$ in D liegt und $\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_n$ in einfach punktierten Domänen mit je einem Rand. Die Farbenzahl von Φ_n kann nicht kleiner sein, als die Farbenzahl einer dieser $n+1$ Domänen. Nach Satz 2 ist sie gleich dem Maximum der $z(\bar{C}_D), z(\bar{C}_1), \ldots, z(\bar{C}_n)$; ist eine der $n+1$ Domänen nicht färbbar, so ist Φ_n nicht färbbar.

Im allgemeinen Fall wird nun $\bar{C}$ zerlegt in $\bar{C} = \bar{C}^0 + \Sigma_1 + \ldots + \Sigma_\mu$, wobei die Σ_j doppelpunktfreie, sich gegenseitig nicht überkreuzende, beiderseits unendliche Streckenzüge sind, welche die Pole verbinden. Schneiden nämlich die D_{N+k} aus $\bar{C}$ die Komplexe $C^{\{k\}}$ heraus ($k = 1, 2, \ldots$), so ist nach Satz 7: $C^{\{k\}} = C_{D_{N+k}} + C_*^{\{k\}}$, wobei $C_*^{\{k\}}$ jedesmal aus μ sich nicht überkreuzenden, unabhängigen, doppelpunktfreien, die Ränder verbindenden Streckenzügen besteht. Diese Zerlegungen sind nicht immer eindeutig, lassen sich aber nur auf endlich viele Arten herstellen. Schneidet D_{N+k-1} aus einem $C_*^{\{k\}}$ den Komplex $C^{\{k\}'}$ aus, so ist (da $C^{\{k\}'}$ im Innern von D_{N+k-1} nur Knotenpunkte geraden Grades hat): $C^{\{k\}'} = C'_{D_{N+k-1}} + C_*^{[k-1]}$. Es besteht aber $C_*^{[k-1]}$ auch aus μ sich nicht überkreuzenden, doppelpunktfreien, unabhängigen die Ränder von D_{N+k-1} verbindenden Streckenzügen auf $\bar{C}$; also ist $C_*^{[k-1]}$ eines von den möglichen $C_*^{\{k-1\}}$. So fortfahrend erhält man $C_*^{[k-2]}, \ldots, C_*^{[1]}$. Dabei ist jeder Komplex ein Teil des vorangehenden und in der beschriebenen Weise zerlegbar. D. h. es gibt zu jedem k ein $C_*^{\{1\}}$, das sich für alle $i < k$ in $C_*^{\{i\}}$ fortsetzen läßt. Da es aber nur endlich viele $C_*^{\{1\}}$ gibt, muß es ein $C_*^{\{1\}} = C_*^{(1)}$ geben, das sich für *jedes* k in ein $C_*^{\{k\}} = C_*^{(k)}$ fortsetzen läßt. Es entsteht so die unendliche Folge der Komplexe $C_*^{(1)}, C_*^{(2)}, \ldots, C_*^{(k)}, \ldots$, von denen jeder alle vorhergehenden enthält und die alle endliche Abschnitte eines Komplexes $\Sigma_* = \Sigma_1 + \ldots + \Sigma_\mu$ mit den verlangten Eigenschaften sind. Ist nun Φ_n eine n-fach punktierte Kugel K_n, so ist $(\bar{C}_1) = (\bar{C}_2) = \ldots = (\bar{C}_n) = 1$; ist dann $\mu = 0$, so ist $z(\bar{C}) = z(\bar{C}_D + \Sigma_*)$. Diese Zahl vergrößert sich

[10] Der Kreis braucht aber nicht α_i zu „umschließen"; denn das α_i enthaltende Stück kann von höherem Zusammenhang sein, als die einfach berandete Ebene.

icht, wenn man die außerhalb D gelegenen Berührungspunkte der $\bar{\Sigma}_i$ auf-
öst; anderseits kann sie aber auch nicht kleiner sein als die Farbenzahl
er Teilung, die $\bar{C}_D + \Sigma_*$ (und folglich $\bar{C}$) auf D bestimmt. Es gilt also

Satz 8. *Auf* Φ_n *ist* $\bar{C} = \bar{\Sigma}_1 + \ldots + \bar{\Sigma}_\mu + \bar{C}_D + \bar{C}_1 + \ldots + \bar{C}_n$. *Dabei sind die* $\bar{\Sigma}_j$ *sich gegenseitig nicht überkreuzende, die Pole verbindende, beiderseits unendliche Streckenzüge;* $\bar{C}_D$ *liegt in einer endlichen Domäne* D, *deren Ränder von* $\bar{\Sigma}_1 + \ldots + \bar{\Sigma}_\mu$ *je* μ_i (= *Grad von* α_i) *mal geschnitten werden* ($\frac{1}{2}\Sigma\mu_i = \mu$); *die* $\bar{C}_i$ *liegen außerhalb von* D. *Ist* $\Phi_n = K_n$, *so ist* $z(\bar{C})$ *gleich der Farbenzahl auf* D.

Für die K_n ist dadurch das Farbenproblem der $\bar{C}$ auf das entsprechende der n-fach berandeten Kugel zurückgeführt und damit auf das der Kugel, die mittels n Knotenpunkten von den Geraden $\mu_1, \ldots, \mu_n$ zerlegt ist. Für beliebiges n ist dies das allgemeine Farbenproblem der Kugel (Vierfarbensatz).

Auf dem Φ_1 schneidet jeder den Pol einschließende Kreis, der durch keinen Knotenpunkt von $\bar{C}'$ geht, diesen Komplex gerade mal. Es sei $2\varkappa'$ die Mindestzahl der Schnittpunkte, ϱ' ein den Pol umschließender Kreis, der $\bar{C}'$ genau $2\varkappa'$ mal schneidet, D' und Δ' die endliche Domäne und der Zylinder, in die Φ_1 durch ϱ zerlegt wird. Dann ist $\bar{C}' = \bar{C}_0' + \bar{C}_1'$, wobei $\bar{C}_1'$ aus allen Strecken von $\bar{C}'$, die in D liegen und aus $2\varkappa'$ gegen den Pol konvergierenden unabhängigen Streckenzügen besteht. Dann ist $(\bar{C}_0') = 1$. Schneiden sich zwei nach dem Pol konvergierende Streckenzüge, so bilden sie vom Schnittpunkt ab einen Komplex von der Art 1. Spaltet man diesen Bestandteil ab und schiebt den Kreis ϱ' über den Schnittpunkt hinaus, so erhält man nach endlich vielen Wiederholungen dieser Operation eine Zerlegung von Φ_1 in D und Δ und entsprechend $\bar{C}' = \bar{C}_0 + \bar{C}_1$, so daß $(\bar{C}_0) = 1$ und $\bar{C}_1$, soweit es in Δ liegt, aus $2\varkappa$ sich nicht schneidenden gegen den Pol konvergierenden Streckenzügen besteht ($\varkappa \leqq \varkappa'$). Damit ist das Farbenproblem des $\bar{C}'$ auf Φ_1 auf eines der einfach berandeten endlichen Domäne D, also auf das Farbenproblem der $\bar{C}$ auf Φ zurückgeführt.

Für die einfach punktierte projektive Ebene ergibt sich also die Lösung des Farbenproblems der C aus den Sätzen 3, 4, 5.

Für den Φ_n kann man mit Hilfe von Satz 8 das Problem auf ein endliches reduzieren, wobei dann außer den Knotenpunkten geraden Grades noch n Knotenpunkte vom Grade $\mu_i + 2\varkappa_i$ auftreten. Ist eines der $\mu_i = 1$, so ist Φ_n nicht färbbar.

§ 4.

Erhaltung der Symmetrieeigenschaften bei der Färbung.

Die bisher erzielten Resultate lassen Folgerungen zu über die Farbenzahlen von Komplexen auf der Kugel und der Ebene, die gegen gewisse Isomorphiegruppen invariant sind, wenn gefordert wird, daß die Färbung die gleiche Invarianz zeigt.

Durch Abrollen eines Zylinders in der Ebene entsteht ein periodisches System. Umgekehrt erhält man aus jedem periodischen System in der Ebene einen Zylinder, wenn man allen sich periodisch entsprechenden Elementen je ein Element zuordnet. Ein singularitätenfreier Kreis des Zylinders, der die beiden Pole trennt, geht dabei in einen periodischen singularitätenfreien beiderseits unendlichen Streckenzug über. Aus Satz 8 folgt daher:

Satz 9. *Zerlegt $\bar{C}$ die Ebene periodisch, so überkreuzen die Bögen, welche entsprechende Punkte aufeinanderfolgender Perioden verbinden, $\bar{C}$ entweder immer gerade oder ungerade mal. Im ersten Falle ist für eine Färbung z^*, die entsprechende Punkte gleichfärbt: $z^*(\bar{C}) = 2$, sonst $z^*(\bar{C}) = 3$, außer wenn auf einem solchen Bogen die Zahl der Überkreuzungen $= 1$ ist. In diesem Falle ist die Färbung z^* unmöglich.*

Aus dem § 3 ergibt sich, daß Satz 9 mit kleinen Veränderungen noch gilt, wenn die Ebene in jeder Periode einmal punktiert ist, ebenso daß die Färbung z^* einer in jeder Periode $(n-2)$-mal punktierten Ebene von der Gültigkeit des Vierfarbensatzes für n-punktige Komplexe auf der Kugel abhängt.

Ein zusammenhängender periodischer $\bar{C}$ von endlicher Breite ist stets zweifarbig (da $\mu_1 = \mu_2 = 0$); die obere und untere Halbebene sind verschieden oder gleichgefärbt, je nachdem die sie verbindenden Querschnitte durch $\bar{C}$ die Strecken ungerade oder gerade mal überkreuzen. Schneidet man die sich ins Unendliche erstreckenden Enden des Zylinders ab und stellt statt dessen eine Verbindung durch einen Henkel her, so erhält man einen Torus, auf dem man, wenn die Zylinderenden verschieden gefärbt sind, noch einen Meridianschnitt aufzeichnen muß, um die Teilung des Torus zweifarbig zu machen. In diesem Falle ist also $\bar{C}$ auf dem Torus von der Art des Meridianschnittes, sonst von der Art 1. Je nachdem wird einer einmaligen Durchlaufung ohne Überkreuzung von $\bar{C}$ auf dem Torus eine Durchlaufung ohne Überkreuzung von einer Periode von $\bar{C}$ auf der Ebene entsprechen, die aufeinanderfolgende[11]) Periodenpunkte ver-

[11]) Wären die Endpunkte verschiedene, aber nicht aufeinanderfolgende Periodenpunkte, so müßte das Bild der Verbindungslinie auf dem Torus sich überkreuzen.

ndet oder eine, die geschlossen ist. Wegen des geforderten Zusammen-
ngs des $\bar{C}$ in der Ebene, kann man die geschlossene Durchlaufung aus
vei sich nicht kreuzenden Bogen zusammensetzen, die aufeinanderfolgende
eriodisch sich entsprechende Punkte verbinden. Also:

Satz 10. *Für periodische $\bar{C}$ von endlicher Breite in der Ebene ist ets $z^*(\bar{C}) = 2$; C läßt sich einzügig oder zweizügig periodisch durch-ufen, je nachdem ein Querschnitt durch $\bar{C}$ die Strecken ungerade oder erade mal überkreuzt.*

Einen zu sich selbst spiegelbildlichen Komplex auf der Kugel (bzw. em Zylinder) kann man als das zwei-eindeutige Bild eines Komplexes uf der projektiven Ebene (bzw. der punktierten projektiven Ebene) auf-assen. Es gilt daher

Satz 11. *Bestimmt $\bar{C}$ auf einer Kugel (bzw. auf einem Zylinder) ine zu sich spiegelbildliche Teilung, so ist $z^*(\bar{C}) = 2, 3, 4$ oder die ärbuny z^* unmöglich, je nachdem die Höchstzahl der voneinander un-bhängigen zusammenhängenden zu sich selbst spiegelbildlichen Kreise ür den Zylinder: zuzüglich der voneinander unabhängigen Paare von ueinander spiegelbildlichen die Pole verbindenden unendlichen Strecken-üge) gerade ist, oder: ungerade aber drei davon durch ein Punktepaar, der ungerade und größer eins aber keine drei durch ein Punktepaar, der gleich eins.*

Rollt man einen Zylinder mit symmetrischer Teilung auf der Ebene b, so entsteht auf ihr ein Komplex, der invariant ist gegen Paddelbe-egungen[12]). Umgekehrt läßt sich jeder ebene Komplex, der diese In-arianz aufweist, auf dem symmetrisch geteilten Zylinder aufrollen. Läßt ich daher eine durch $\bar{C}$ bestimmte Domänenteilung der Ebene, die in-ariant ist gegen eine Gruppe von Paddelbewegungen, so färben, daß die ärbung die gleiche Invarianz besitzt, so genügen dafür vier Farben. Die enauen Bedingungen für die Farbenzahl ergeben sich aus Satz 11.

Leipzig, 18. Juni 1924.

[12]) Die Bezeichnung rührt von H. Weyl her (Die Idee der Riemannschen Fläche, eipzig, Teubner 1913, S. 26).

(Eingegangen am 18. Juni 1924.)

Beweis des Jordanschen Kurvensatzes.

Von

F. Hartogs in München.

Für den Satz, daß jede geschlossene Jordansche Kurve die Ebene in genau zwei Gebiete zerlegt, sind außer von C. Jordan selbst noch weitere Beweise mit den verschiedensten Hilfsmitteln gegeben worden*). Trotzdem wird man kaum den Eindruck gewinnen können, daß das Ziel, dem Beweise einen möglichst hohen Grad von Einfachheit und Natürlichkeit zu geben, bereits erreicht sei. Aus diesem Gesichtspunkte heraus dürfte es immerhin gerechtfertigt erscheinen, zu den bereits vorhandenen neuen Versuche zur Erreichung dieses Ziels zuzufügen, deren Gedankengänge sich dann möglicherweise bei weiteren Bemühungen im obigen Sinne als nützlich erweisen können.

Der hier vorliegende Beweis unterscheidet sich von manchen der früheren dadurch, daß keinerlei Approximation der Jordanschen Kurve durch Polygone dabei benutzt wird. Auf Grund einer geringen Anzahl von Hilfssätzen sehr einfacher und anschaulicher Natur wird der Nachweis unter Voranstellung des Satzes, daß eine nicht geschlossene Jordansche Kurve keine Zerlegung der Ebene bewirkt, mit durchaus elementaren Hilfsmitteln geführt. Der entsprechende Satz für Polygone (oder wenigstens für Treppenpolygone, was bereits ausreichen würde) wird dabei als bewiesen vorausgesetzt.

Am Schlusse wird noch eine gewisse Verallgemeinerung des erwähnten Satzes, daß eine Jordansche Kurve, welche ein Gebiet begrenzt, notwendig geschlossen sein muß, auf Gebiete mit beliebiger Berandung zugefügt.

*) Ausführliche Zusammenstellung derselben in dem kürzlich erschienenen Rosenthalschen Encyklopädie-Artikel (Encykl. d. math. Wiss. II C 9a, S. 916). Noch nicht mit aufgeführt sind daselbst die neuerdings erschienenen von Kerékjártó (Math.-naturw. Berichte der ungar. Akad. d. Wiss. **38** (1919), S. 194 = Vorlesungen über Topologie, Berlin 1923, S. 59) und E. Schmidt (Sitzungsber. Preuß. Akad. d. Wiss. 1923, S. 318).

§ 1.

Hilfssätze.

Unter einem „*Jordanschen Bogen*“ oder einer „*offenen Jordanschen Kurve*“ (oder auch einem „Teilbogen einer geschlossenen Jordanschen Kurve“) ist im folgenden stets das umkehrbar eindeutige und stetige Bild einer Strecke (einschließlich ihrer Endpunkte), unter einer „*geschlossenen Jordanschen Kurve*“ das umkehrbar eindeutige und stetige Bild einer Kreisperipherie zu verstehen.

Satz 1. *Beschreibt man um den einen Endpunkt E eines Jordanschen Bogens j einen Kreis $(E)r$, welcher j trifft, so gibt es bei hinlänglich kleiner Wahl von r_0 stets einen und nur einen Teilbogen $\overset{\frown}{MN}$ von j, welcher die Kreisperipherien $(E)r_0$ und $(E)r$ unmittelbar verbindet* (d. h. mit ihnen nur je einen seiner Endpunkte gemein hat).

Beweis. Ist beim Durchlaufen des Bogens j von E aus nach dem anderen Endpunkt E' N der erste Punkt, den derselbe mit der Kreisperipherie $(E)r$ gemein hat, so hat der Restbogen $\overset{\frown}{NE'}$, da er E nicht enthält, von E einen positiven Abstand d und liegt also ganz außerhalb $(E)r_0$, wenn nur $r_0 < d$ gewählt wird. Der letzte Punkt des Bogens $\overset{\frown}{EN}$, den dieser mit der Kreisperipherie $(E)r_0$ gemein hat, sei M. Der Bogen $\overset{\frown}{MN}$ hat dann die behauptete Eigenschaft.

Fig. 1.

Gäbe es noch einen zweiten solchen, $\overset{\frown}{M'N'}$, so müßte M' als Punkt der Kreislinie $(E)r_0$ auf $\overset{\frown}{EM}$ und N' als Punkt der Kreislinie $(E)r$ auf $\overset{\frown}{NE'}$ liegen; dann aber hätte $\overset{\frown}{M'N'}$ außer seinen Endpunkten noch die Punkte M und N mit je einem der beiden Kreise gemein.

Satz 2. *Ist H eine Häufungsstelle der Teilbogen $j_1, j_2, \ldots$ einer (offenen oder geschlossenen) Jordanschen Kurve j* (d. h. eine Häufungsstelle der Punktmenge $j_1 + j_2 + \ldots$) *ohne einem dieser Bogen selbst anzugehören, so ist H stets auch Häufungsstelle der Endpunkte dieser Bogen.*

Beweis. Bei der umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildung von j auf eine Strecke bzw. Kreislinie mögen den Endpunkten P_ν und P_ν' von j_ν die Punkte t_ν bzw. t_ν' entsprechen; dem Punkte H der Punkt t^0. Es muß dann t^0 eine Häufungsstelle der Strecken bzw. Bogen $(t_\nu t_\nu')$ sein, ohne einem derselben anzugehören und daher auch Häufungsstelle der Menge der Endpunkte t_ν, t_ν', woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Satz 3. *Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ und eine (offene oder geschlossene) Jordansche Kurve j. Die letztere habe mit den Quadratseiten AB und CD keinen Punkt gemein; auch gebe es keinen Teilbogen derselben, welcher BC mit DA durch das Innere des Quadrates hindurch*[1] *verbindet. Alsdann existiert stets ein Streckenzug, welcher AB mit CD durch das Innere des Quadrates hindurch verbindet ohne j zu treffen.*

Beweis. Liegt die Kurve j ganz im Innern des Quadrates, so folgt die Behauptung unmittelbar daraus, daß sie von BC einen von Null verschiedenen Abstand besitzt; dieser Fall kann daher im folgenden außer Betracht bleiben. — Ist die Jordansche Kurve eine offene, so bedeuten im folgenden E und E' die Endpunkte derselben.

Wir betrachten einerseits die Punktmenge $\mathfrak{P}$, welche aus allen denjenigen Bogen von j besteht, deren Endpunkte, soweit von E und E' verschieden, auf BC und deren übrige Punkte im Innern des Quadrates liegen[2]); andrerseits die analog definierte Punktmenge $\mathfrak{Q}$, bei der BC durch AD ersetzt ist. Jeder innerhalb des Quadrats gelegene Punkt von j gehört stets einem und nur einem Bogen der erwähnten Art und daher genau einer der beiden Punktmengen an. Die Punktmenge $\mathfrak{P}$ braucht, da sie möglicherweise aus unendlich vielen Bogen besteht, nicht notwendig abgeschlossen zu sein; eine nicht zu $\mathfrak{P}$ gehörige Häufungsstelle von $\mathfrak{P}$ muß aber jedenfalls zu j gehören und zwar (wegen des vorigen Satzes) auf BC liegen. Fügt man daher die sämtlichen Punkte von BC zur Menge $\mathfrak{P}$ hinzu, so ist die so entstehende Menge $\overline{\mathfrak{P}}$ abgeschlossen, analog $\overline{\mathfrak{Q}}\,(=\mathfrak{Q}+AD)$. Da die abgeschlossenen Mengen $\overline{\mathfrak{P}}$ und $\overline{\mathfrak{Q}}$ keinen Punkt gemein haben, so besitzen sie einen von Null verschiedenen Abstand ϱ.

Das Quadrat $ABCD$ werde nun in kongruente Teilquadrate zerlegt, deren Seitenlänge $< \frac{\varrho}{2}$ ist, so daß kein Teilquadrat gleichzeitig einen Punkt von $\overline{\mathfrak{P}}$ und einen von $\overline{\mathfrak{Q}}$ enthalten kann. Diejenigen Teilquadrate, welche Punkte von $\overline{\mathfrak{P}}$ (in ihrem Innern oder auf ihrer Begrenzung) enthalten, bilden ein zusammenhängendes Flächenstück $\mathfrak{F}$, dessen Außenrand $\mathfrak{R}$ die Strecke BC, jedoch keinen Punkt von AD enthält. $\mathfrak{R}$ ist also nach Fortnahme von BC ein B mit C verbindender Streckenzug. Ist B' der letzte Punkt dieses Streckenzuges, der auf BA liegt, und C' der erste Punkt des Streckenzugteiles $B'C$, der auf CD liegt, so hat das Stück $B'C'$ des Streckenzuges die behauptete Eigenschaft, da es bis auf seine Endpunkte ganz im Innern des Quadrates liegt und weder mit $\overline{\mathfrak{P}}$ noch mit $\overline{\mathfrak{Q}}$

[1]) D. h. so, daß der eine Endpunkt des Teilbogens auf BC, der andere auf DA liegt und alle übrigen Punkte desselben im Innern des Quadrates liegen.

[2]) Ist j eine geschlossene Kurve, so sind die Worte „soweit von E und E' verschieden“ zu streichen. — Gibt es überhaupt keinen Bogen jener Art, so ist $\mathfrak{P}=0$.

einen Punkt gemein haben kann. (Jeder nicht auf BC gelegene Punkt von $\bar{\mathfrak{P}}$ liegt nämlich im *Innern* von $\mathfrak{F}$ und mithin nicht auf $\mathfrak{R}$.)

Der vorstehende Satz läßt sich leicht auf den Fall erweitern, in welchem an Stelle der Quadratfläche eine beliebige Polygonfläche, und an Stelle der Jordanschen Kurve j eine aus mehreren Jordanschen Kurven ohne gemeinsame Punkte[3]) bestehende Punktmenge j_0 tritt; des weiteren gilt die Aussage des Satzes in gleicher Weise für das Außengebiet wie für das Innengebiet des betreffenden Polygons. Der Satz nimmt alsdann die folgende Form an:

Satz 3a. *Gegeben sei ein einfaches* (d. h. von einem einzigen einfach geschlossenen Streckenzug begrenztes) *Polygon und eine aus einer endlichen Anzahl von* (offenen oder geschlossenen) *Jordanschen Kurven ohne gemeinsame Punkte bestehende Punktmenge* j_0. *Der Polygonrand sei durch vier beliebige Punkte* A, B, C, D *desselben in die Abschnitte* $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$ *zerlegt.* j_0 *habe mit* $\overset{\frown}{AB}$ *und* $\overset{\frown}{CD}$ *keinen Punkt gemein; auch gebe es keinen der Menge* j_0 *angehörenden Jordanschen Bogen, welcher* $\overset{\frown}{BC}$ *mit* $\overset{\frown}{DA}$ *durch das Innere* [*bzw. Äußere*] *des Polygons hindurch verbindet. Alsdann existiert stets ein Streckenzug, welcher* $\overset{\frown}{AB}$ *mit* $\overset{\frown}{CD}$ *durch das Innere* [*bzw. Äußere*] *des Polygons hindurch verbindet, ohne* j_0 *zu treffen.*

Der Beweis wird wörtlich ebenso wie der des Satzes 3 geführt; der einzige Unterschied ist, daß an Stelle der Zerlegung des Quadrats $ABCD$ in kongruente Teilquadrate, deren Seitenlänge $< \frac{\varrho}{2}$ ist, diejenige Zerlegung der Innen- bzw. Außenfläche des gegebenen Polygons in Teilpolygone tritt, welche entsteht, wenn die Ebene mit einem Netz von Quadraten bedeckt wird, deren Seitenlänge $< \frac{\varrho}{2}$ ist.

§ 2.

Nachweis, daß eine offene Jordansche Kurve die Ebene nicht zerlegt.

Im folgenden wird, wie üblich, unter einem „*Gebiet*“ $\mathfrak{G}$ eine Punktmenge von der Beschaffenheit verstanden, daß erstens jeder Punkt P derselben ein innerer Punkt von $\mathfrak{G}$ ist (d. h. daß eine zu $\mathfrak{G}$ gehörige Kreisfläche mit dem Mittelpunkt P existiert) und daß zweitens je zwei Punkte von $\mathfrak{G}$ durch einen zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Streckenzug miteinander verbunden werden können. Ein nicht zu $\mathfrak{G}$ gehöriger Punkt der Ebene heißt „*Rand-*“

[3]) Diese bloß zwecks Vereinfachung der Darstellung zugefügte Einschränkung könnte in Wahrheit auch fortbleiben.

oder „*Begrenzungspunkt*“ von $\mathfrak{G}$, wenn in jeder Nähe desselben Punkte von $\mathfrak{G}$ liegen, andernfalls „*äußerer Punkt*“. Ist $\mathfrak{G}$ ein im Endlichen (d. h. im Innern eines Kreises $\mathfrak{K}$) gelegenes Gebiet, so möge ein äußerer Punkt von $\mathfrak{G}$ ein „*U-Punkt*“ heißen, wenn er mit einem außerhalb $\mathfrak{K}$ gelegenen Punkt durch einen aus lauter äußeren Punkten bestehenden Streckenzug verbunden werden kann. Die sämtlichen U-Punkte bilden wiederum ein Gebiet, welches das „*U-Gebiet*“ heißen möge. Diejenigen Randpunkte von $\mathfrak{G}$, in deren beliebiger Nähe U-Punkte liegen, mögen als „*äußere Randpunkte*“, ihre Gesamtheit als der „*Außenrand*“ von $\mathfrak{G}$ bezeichnet werden.

Wir beweisen nun zunächst den folgenden

Satz 4. *Besteht der Außenrand $\mathfrak{R}$ eines Gebietes*[4]) $\mathfrak{G}$ *aus lauter Punkten einer (offenen oder geschlossenen) Jordanschen Kurve j und werden um zwei beliebige Punkte von $\mathfrak{R}$ zwei einander ausschließende Kreise K und K' beschrieben, so existieren stets zwei Teilbogen von j, deren jeder K mit K' verbindet und welche keinen Punkt miteinander gemein haben*[5]).

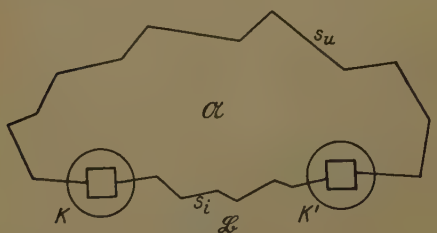


Fig. 2.

Beweis. Seien $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ zwei innerhalb K bzw. K' gelegene und zu diesen konzentrische Quadrate. Da es innerhalb derselben sowohl innere Punkte von $\mathfrak{G}$ als auch U-Punkte gibt, so kann man ihre Ränder durch zwei verschiedene Streckenzüge miteinander verbinden, von denen der eine, s_i, aus lauter inneren, der andere, s_u, aus lauter U-Punkten besteht. Durch die acht Quadratseiten und die beiden Streckenzüge wird[6]) die Ebene

[4]) Ist vom Außenrand eines Gebietes die Rede, so soll es sich dabei stets nur um ein im Endlichen gelegenes Gebiet handeln.

[5]) $\mathfrak{R}$ muß also, wie hieraus folgt, jedenfalls eine zusammenhängende Punktmenge (und daher ein Kontinuum) sein. (Denn da die Radien von K und K' beliebig klein gewählt werden können, so lassen sich zwischen je zwei Punkten von $\mathfrak{R}$ eine endliche Anzahl weiterer derart einschalten, daß der Abstand je zweier aufeinanderfolgender unterhalb einer vorgeschriebenen Zahl bleibt.) Setzt man umgekehrt als bekannt voraus, daß der Außenrand $\mathfrak{R}$ eines beliebigen Gebietes stets eine zusammenhängende Menge ist (vgl. hierüber Fußnote 15), so gestaltet sich, da im vorliegenden Fall $\mathfrak{R}$ mit einem Teilbogen von j identisch sein muß, der folgende Beweis insofern etwas einfacher, als j_0 dann einfach diesen Teilbogen bedeutet.

[6]) Hier wird der Jordansche Satz für Polygone benutzt. (Zunächst kann aus s_i und s_u durch Hinzufügen je eines Teils der Ränder von $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ ein einfach geschlossener Streckenzug zusammengesetzt werden, welcher die Ebene in zwei Gebiete

n vier Gebiete zerlegt, nämlich die beiden Quadratflächen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ und zwei weitere, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Da sowohl s_i als auch s_u einen von Null verschiedenen Abstand von $\mathfrak{R}$ besitzt, so ist es leicht, j in eine endliche Anzahl von Teilbogen derart zu zerlegen, daß keiner derselben gleichzeitig einen Punkt von $\mathfrak{R}$ und einen solchen von s_i oder s_u enthält[6a]). Die Gesamtheit derjenigen Teilbogen, welche Punkte von $\mathfrak{R}$ enthalten, sei j_0. Da alsdann j_0 weder mit s_i noch mit s_u einen Punkt gemein hat und da ferner auf jedem s_i mit s_u verbindenden Streckenzug offenbar ein äußerer Randpunkt von $\mathfrak{G}$ und mithin ein Punkt von j_0 liegen muß, so folgt aus Satz 3a, daß es einen innerhalb $\mathfrak{A}$ — und ebenso einen innerhalb $\mathfrak{B}$ — verlaufenden, in j_0 enthaltenen Bogen geben muß, welcher $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}'$ und daher auch K mit K' verbindet. Diese beiden Bogen (deren Endpunkte auf den Quadraträndern $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ liegen) können aber weder mit s_i noch mit s_u noch miteinander irgendeinen Punkt gemein haben.

Satz 5. *Es gibt kein Gebiet, dessen Außenrand (und somit auch keines, dessen volle Begrenzung) aus lauter Punkten einer offenen Jordanschen Kurve besteht.*

Beweis. Es sei entgegen der Behauptung $\mathfrak{G}$ ein derartiges Gebiet, $j = \overset{\frown}{EE'}$ die zugehörige Jordansche Kurve. Beim Durchlaufen der Kurve j von E nach E' sei A der erste unter denjenigen Kurvenpunkten, die zugleich äußere Randpunkte von $\mathfrak{G}$ sind, B irgendein weiterer solcher. Um A und B mögen zwei Kreise $(A)r$ und $(B)r'$ beschrieben werden, die einander ausschließen. Nach Satz 1 kann $r_0 (< r)$ so klein gewählt werden, daß nur *ein einziger* Teilbogen $\overset{\frown}{MN}$ von $\overset{\frown}{AE'}$ existiert, welcher die Kreisperipherien $(A)r_0$ und $(A)r$ unmittelbar verbindet. Andererseits muß es nach Satz 4 *zwei* Teilbogen von $\overset{\frown}{AE'}$ geben, deren jeder $(A)r_0$ mit $(B)r'$ verbindet und welche keinen Punkt miteinander gemein haben. Diese beiden Aussagen sind aber, wie unmittelbar einleuchtet, nicht miteinander verträglich.

$\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ zerlegt. Jede der beiden Quadratflächen gehört einem dieser Gebiete an. Nach Fortnahme derselben bleiben beide Gebiete nach wie vor zusammenhängend, wie wiederum auf Grund des Jordanschen Polygonsatzes ersichtlich.

[6a]) Enthält j überhaupt keinen Punkt von s_i und von s_u, so ist dies selbstverständlich. Im anderen Falle entspricht bei der umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildung von j auf eine Strecke (bzw. Kreislinie) S der Gesamtheit derjenigen Punkte von j, welche zu $\mathfrak{R}$ gehören, eine abgeschlossene Punktmenge ϱ und der Gesamtheit derjenigen Punkte von j, welche zu s_i oder s_u gehören, eine abgeschlossene Punktmenge σ. Ist δ der Abstand dieser beiden Punktmengen, so teile man S in eine endliche Anzahl von Strecken (bzw. Bogen) ein, deren Längen $< \delta$ sind, und übertrage diese Einteilung auf j.

§ 3.

Beweis des Jordanschen Satzes.

Satz 6. *Ein der Rechteckfläche $ABB'A'$ angehörender Jordanscher Bogen $j = \overset{\frown}{EE'}$ habe mit den Rechteckseiten AB und $A'B'$ nur je einen Endpunkt, mit AA' und BB' überhaupt keinen Punkt gemein. Dann wird die Rechteckfläche durch j in genau zwei Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zerlegt, so zwar, daß jeder Punkt von j gemeinsamer Begrenzungspunkt von $\mathfrak{A}$ und von $\mathfrak{B}$ ist*[7]).

Beweis. Es sei A_0 ein beliebig gewählter Zwischenpunkt der Strecke AA', B_0 ein solcher der Strecke BB'. Es existiert alsdann kein Streckenzug, welcher A_0 mit B_0 durch das Innere des Rechtecks hindurch verbindet, ohne j zu treffen. Denn ein solcher Streckenzug würde die Fläche des Rechtecks in zwei Polygonflächen Π_1 und Π_2 zerlegen[8]) und j würde in zwei abgeschlossene Punktmengen ohne gemeinsamen Punkt zerfallen (deren eine nämlich in Π_1 und deren andere in Π_2 gelegen ist), was nicht möglich ist.

Die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche im Innern des Rechtecks, aber nicht auf j liegen und mit A_0 [bzw. mit B_0] durch das Innere des Rechtecks hindurch mittels eines j nicht treffenden Streckenzugs verbunden werden können, sei nun mit $\mathfrak{A}$ [bzw. $\mathfrak{B}$] bezeichnet. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind dann zwei Gebiete (im Sinne der in § 2 gegebenen Definition), welche gemäß obigem keinen Punkt gemein haben. Der Begrenzung von $\mathfrak{A}$ gehören außer den Strecken AA', AE und $A'E'$ noch die sämtlichen Punkte von j an. Würde nämlich ein (von E und E' verschiedener) Punkt P von j nicht Randpunkt von $\mathfrak{A}$ sein, so würde (da in der Nähe von P ebenfalls kein Randpunkt liegen könnte) auch ein gewisser, P enthaltender Teilbogen $\overset{\frown}{QPQ'}$ keinen Randpunkt von $\mathfrak{A}$ enthalten; die Begrenzung von $\mathfrak{A}$ würde also im Widerspruch zu Satz 5 aus lauter Punkten der offenen Jordanschen Kurve $QEAA'E'Q'$ bestehen. Analoges gilt für $\mathfrak{B}$.

Gäbe es nun im Innern des Rechtecks noch einen Punkt G, welcher weder auf j liegt noch zu $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ gehört, so würden die sämtlichen Punkte, welche mit G durch einen innerhalb des Rechtecks verlaufenden und j nicht treffenden Streckenzug verbunden werden können, ein Gebiet $\mathfrak{G}$ bilden, das weder mit $\mathfrak{A}$ noch mit $\mathfrak{B}$ einen Punkt gemein hat. Als Rand-

[7]) Die Zugrundelegung eines derartigen Satzes geschieht nach dem Vorgange von Herrn Pringsheim. (Siehe S. 208—209 der Abhandlung „Über die äußere Berandung eines im Endlichen gelegenen Gebietes und den Jordanschen Kurvensatz", Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wiss. 1922).

[8]) Hier wird nochmals der Jordansche Satz für Polygone benutzt.

punkte von $\mathfrak{G}$ kämen aber im Widerspruch zum Satz 5 nur die Punkte von j in Betracht, da ja für jeden von E und E' verschiedenen Punkt einer Rechteckseite feststeht, daß die in der Umgebung desselben gelegenen inneren Punkte des Rechtecks sämtlich zu $\mathfrak{A}$ bzw. sämtlich zu $\mathfrak{B}$ gehören.

Satz 7. (*Jordanscher Satz.*) *Durch eine geschlossene Jordansche Kurve J wird die ganze Ebene in zwei Gebiete $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{G}$ zerlegt, derart, daß jeder Punkt von J gemeinsamer Begrenzungspunkt von $\mathfrak{C}$ und von $\mathfrak{G}$ ist.*

Beweis. Es werde ein Rechteck $ABB'A'$ gezeichnet, welches die Kurve in seinem Innern enthält. Irgend zwei Punkte von J, welche verschiedene Abstände von AB haben, seien G und G'. Der näher an AB gelegene, etwa G, werde mit einem beliebigen Punkt E von AB geradlinig verbunden, von der Verbindungslinie EG aber nur das Stück EF von E bis zum ersten Schnittpunkt F mit der Kurve beibehalten. Auf analoge Weise entstehe $E'F'$ aus $E'G'$ (wobei E' einen beliebigen Punkt von $A'B'$ bedeutet). EF und $E'F'$ haben alsdann keinen Punkt gemein.

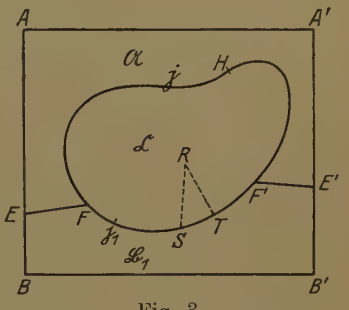


Fig. 3.

J wird durch F und F' in zwei Bogen j und j_1 zerlegt. Durch Hinzufügung der beiden Strecken EF und $E'F'$ zu jedem derselben entstehen zwei Jordansche Bogen i und i_1 mit den Endpunkten E und E'.

Nach dem vorigen Satz wird die Rechteckfläche durch i in zwei Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, durch i_1 in zwei Gebiete $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ zerlegt (wobei mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ die an AA' angrenzenden Gebiete bezeichnet seien).

Da der Bogen j_1 außer seinen Endpunkten keinen Punkt mit i gemein hat, so verläuft derselbe (abgesehen von seinen Endpunkten) vollständig in einem der beiden Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, beispielsweise in $\mathfrak{B}$.

Jeder Punkt von $\mathfrak{A}$ gehört alsdann auch zu $\mathfrak{A}_1$, da ja ein in $\mathfrak{A}$ verlaufender Streckenzug auch j_1 nicht treffen kann. Hingegen zerfallen die Punkte von $\mathfrak{B}$, abgesehen von denen, die auf j_1 liegen, in zwei Kategorien, da sie teils zu $\mathfrak{A}_1$, teils zu $\mathfrak{B}_1$ gehören. (Punkte beider Arten gibt es ja sicher in der Umgebung jedes Punktes von j_1.) Bezeichnen wir also mit $\mathfrak{C}$ die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche gleichzeitig zu $\mathfrak{B}$ und zu $\mathfrak{A}_1$ gehören, so *gehört jeder innere Punkt des Rechtecks, sofern er nicht auf i oder i_1 gelegen ist, genau einer der drei Punktmengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}_1$ an*[9]).

[9]) Bemerkt sei noch, daß jeder (von F und F' verschiedene) Punkt H des Bogens j innerer Punkt von $\mathfrak{A}_1$ ist (da er nicht Randpunkt von $\mathfrak{A}_1$ ist, aber in beliebiger Nähe

Da offenbar jeder Punkt von $\mathfrak{C}$ zugleich innerer Punkt von $\mathfrak{C}$ ist, so bedarf es, um $\mathfrak{C}$ als ein Gebiet (im Sinne der in § 2 gegebenen Definition) zu erkennen, nur noch des Nachweises, daß $\mathfrak{C}$ zusammenhängend ist (in dem Sinne, daß zwei Punkte von $\mathfrak{C}$ durch einen zu $\mathfrak{C}$ gehörigen Streckenzug verbunden werden können).

Als Begrenzungspunkte von $\mathfrak{C}$ kommen jedenfalls nur die Punkte von J in betracht; denn ist P_0 irgendein Punkt einer Rechteckseite oder von EF (exkl. F) oder von $E'F'$ (exkl. F') so gehört seine volle Umgebung, soweit innerhalb des Rechtecks gelegen, entweder zu $\mathfrak{A}$ oder zu $\mathfrak{B}_1$ oder teils zu $\mathfrak{A}$, teils zu $\mathfrak{B}_1$.

Ist nun $\mathfrak{C}$ zusammenhängend (also ein Gebiet), so folgt aus Satz 5 sofort, daß *jeder* Punkt von J ein Randpunkt von $\mathfrak{C}$ sein muß, so daß die volle Begrenzung von $\mathfrak{C}$ mit J identisch ist. (Denn wäre ein Punkt P von J nicht Randpunkt von $\mathfrak{C}$, so müßte auch ein gewisser P enthaltender Teilbogen $\overset{\frown}{QPQ'}$ von solchen Randpunkten frei sein; alle Randpunkte von $\mathfrak{C}$ würden also der offenen Jordanschen Kurve angehören, welche aus $\mathfrak{C}$ durch Fortnahme dieses Teilbogens hervorgeht.)

Ist $\mathfrak{C}$ hingegen *nicht* zusammenhängend, so gilt das soeben über $\mathfrak{C}$ Gesagte wörtlich für jeden der zusammenhängenden Bestandteile $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$, ..., in welche $\mathfrak{C}$ alsdann zerfällt[10]). Da nun in diesem Falle die Anzahl der Bestandteile mindestens zwei beträgt, so würde folgen, daß in der Umgebung eines beliebig gewählten Punktes von J stets Punkte von mindestens *drei* verschiedenen Gebieten (nämlich $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ und $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}_1$) liegen müssen. Wir werden uns nun aber davon überzeugen, daß dies in Wahrheit niemals eintreten kann.

Enthält nämlich zunächst j oder j_1 eine geradlinige Strecke, so können in der Umgebung irgendeines Zwischenpunktes P derselben sicherlich nur Punkte *zweier* Gebiete liegen. Denn eine hinreichend kleine Kreisfläche mit dem Mittelpunkt P wird durch die in der Figur vorhandenen Linien lediglich in zwei Halbkreise zerlegt. $\mathfrak{C}$ ist also in diesem Falle sicher zusammenhängend.

Ist jenes nicht der Fall, so wollen wir die Figur dadurch etwas abändern, daß wir ein gewisses Stück $\overset{\frown}{ST}$ des Bogens j_1 durch einen (in $\mathfrak{C}$ verlaufenden) Streckenzug ersetzen. Zu diesem Zweck werde um einen

---

desselben Punkte von $\mathfrak{A}$ und somit von $\mathfrak{A}_1$ liegen). Die in der Umgebung von H gelegenen Punkte gehören also, soweit sie nicht auf j liegen, teils zu $\mathfrak{A}$ und teils zu $\mathfrak{C}$.

[10]) Ein solcher Bestandteil besteht aus allen denjenigen Punkten von $\mathfrak{C}$, welche mit einem festen Punkte C von $\mathfrak{C}$ durch einen zu $\mathfrak{C}$ gehörigen Streckenzug verbunden werden können. (Ob die Anzahl dieser Bestandteile endlich oder unendlich groß ist, bleibt zunächst dahingestellt.)

beliebigen Punkt M des Bogens j_1 ein Kreis K beschrieben, der i ausschließt (also in $\mathfrak{B}$ liegt). Von einem zu $\mathfrak{A}_1$ (also zu $\mathfrak{C}$) gehörenden Punkt R der Kreisfläche K aus mögen zwei Halbstrahlen gezogen werden, welche nach je einem in K gelegenen Punkte von j_1 gerichtet sind, von jedem der beiden Halbstrahlen jedoch bloß das Stück von R bis zum ersten Schnittpunkte S bzw. T mit j_1 beibehalten werden. Der Bogen $\overset{\frown}{ST}$ werde nunmehr durch den Streckenzug SRT ersetzt. Die so entstehende neue Figur $\mathfrak{F}^*$ besitzt (abgesehen von dem Vorhandensein geradliniger Bestandteile von j_1) offenbar sämtliche Eigenschaften, welche von der ursprünglichen Figur $\mathfrak{F}$ vorausgesetzt waren. Die einzelnen zur neuen Figur gehörigen Linien und Gebiete sollen in der Bezeichnung durch einen zugefügten Stern von den entsprechenden früheren unterschieden werden.

Da i und somit $\mathfrak{A}$ unverändert geblieben ist ($\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}$) und $\mathfrak{B}_1$, wie unmittelbar ersichtlich, keinesfalls Punkte verloren hat, ferner der fortgefallene Teilbogen $\overset{\frown}{ST}$ von j_1 zu $\mathfrak{B}_1^*$ gekommen ist (da er nicht zur Begrenzung von $\mathfrak{B}_1^*$ gehört, aber in der Umgebung jedes Punktes desselben Punkte von $\mathfrak{B}_1^*$ liegen), so kann $\mathfrak{C}$ keinen einzigen Punkt gewonnen haben, d. h. $\mathfrak{C}^*$ ist in $\mathfrak{C}$ enthalten.

$\mathfrak{C}^*$ ist nun aber, da j_1^* geradlinige Strecken enthält, sicher zusammenhängend. Ist also $\mathfrak{C}$ nicht zusammenhängend, so muß einer der zusammenhängenden Bestandteile von $\mathfrak{C}$, etwa $\mathfrak{C}'$, das ganze Gebiet $\mathfrak{C}^*$ enthalten.

Nun befinden sich[11]) in der Umgebung eines beliebig gewählten (von F und F' verschiedenen) Punktes H von j außer weiteren Punkten von j lediglich Punkte von $\mathfrak{A}^*(=\mathfrak{A})$ und von $\mathfrak{C}^*$ (also von $\mathfrak{C}'$) und mithin kein einziger Punkt von $\mathfrak{C}''$. Da aber letzteres zu dem oben festgestellten im Widerspruch steht, so muß $\mathfrak{C}$ zusammenhängend sein.

Werden nun schließlich die vier Rechteckseiten sowie die Strecken EF und $E'F'$ beseitigt, so hat dies auf $\mathfrak{C}$ keinen Einfluß, da ja, abgesehen von F und F', kein Punkt dieser sechs Strecken innerer oder Begrenzungspunkt von $\mathfrak{C}$ ist. Dagegen verschmelzen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}_1$ mit dem Außengebiet des Rechtecks zu einem einzigen Gebiet $\mathfrak{G}$, welches ebenfalls jeden Punkt von J als Randpunkt besitzt, da ja jeder Punkt von j Randpunkt von $\mathfrak{A}$ und jeder Punkt von j_1 Randpunkt von $\mathfrak{B}_1$ ist.

---

[11]) Siehe Fußnote [9]). Das dort Gesagte gilt natürlich in gleicher Weise für die Figur $\mathfrak{F}^*$.

§ 4.

Hilfssatz über Grenzgebilde von Streckenzügen.

Sind unendlich viele Streckenzüge $s_1, s_2, s_3, \ldots$ gegeben, so heiße[12]) P ein *Näherungspunkt* derselben, wenn jede (noch so kleine) Kreisfläche mit dem Mittelpunkt P von unendlich vielen Streckenzügen getroffen wird, speziell ein *innerer Näherungspunkt*, wenn jede solche Kreisfläche von „fast allen" Streckenzügen getroffen wird (d. h. höchstens von endlich vielen Streckenzügen nicht getroffen wird). Jeder innere Näherungspunkt ist zugleich auch ein Näherungspunkt; ist umgekehrt P ein Näherungspunkt, so gibt es eine Teilfolge $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma, \ldots$, für welche P ein innerer Näherungspunkt ist.

Satz 8[13]). *Sind unendlich viele, in einem endlichen Gebiet gelegene (offene oder geschlossene) Streckenzüge $s_1, s_2, \ldots$ gegeben und besitzen dieselben mindestens einen inneren Näherungspunkt N_0, so ist die aus den sämtlichen Näherungspunkten gebildete Menge $\mathfrak{N}$ ein Kontinuum*, d. h. abgeschlossen und zusammenhängend (sofern überhaupt außer N_0 noch weitere Näherungspunkte vorhanden sind).

Beweis. Wäre die abgeschlossene Menge $\mathfrak{N}$ nicht zusammenhängend, so wäre sie in zwei abgeschlossene Teilmengen $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ ohne gemeinsamen Punkt zerlegbar; der Abstand dieser letzteren sei ϱ. Mit Benutzung eines Netzes von Quadraten, deren Seitenlänge $< \frac{1}{8}\varrho$ gewählt ist, könnte man alsdann eine endliche Anzahl von (ein- oder mehrfach zusammenhängenden) Polygonflächen ohne gemeinsame Punkte herstellen, derart, daß jeder Punkt von $\mathfrak{N}$ innerer Punkt einer solchen Polygonfläche ist und keine der Polygonflächen gleichzeitig Punkte von $\mathfrak{N}_1$ und von $\mathfrak{N}_2$ enthält. Gehört nun etwa N_0 der Teilmenge $\mathfrak{N}_1$ an und liegt im Polygon Π_1, so sei N_2 ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{N}_2$ und liege etwa im Polygon Π_2. Greift man nun aus den Streckenzügen eine Teilfolge heraus, welche N_2 als inneren Näherungspunkt besitzt, so muß es unter diesen Streckenzügen unendlich viele geben, welche sowohl Π_1 als auch Π_2 treffen, diese also miteinander verbinden und infolgedessen streckenweise außerhalb sämtlicher Polygone

---

[12]) Vgl. Hahn, Theorie der reellen Funktionen I (Berlin 1920), S. 74. In der Encykl. d. math. Wiss. II C 9a (S. 939) ist statt „Näherungspunkt" und „innerer Näherungspunkt" die Bezeichnung „Grenzpunkt" und „Grenzpunkt für fast alle s_n" verwendet.

[13]) Der Satz nebst Beweis bleibt unverändert gültig, wenn an Stelle der Streckenzüge beliebige (in einem endlichen Gebiet gelegene) zusammenhängende Punktmengen treten. Er findet sich in dieser oder in ähnlicher Form ausgesprochen bei Zoretti (Journal de Math. (6) **1** (1905), S. 8—9), Hausdorff (Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, S. 302), sowie in der Encykl. d. math. Wiss. II C 9a, S. 941.

verlaufen. Dies würde aber im Widerspruch zum Obigen die Existenz von Näherungspunkten nach sich ziehen, welche außerhalb der sämtlichen Polygone oder auf deren Begrenzung liegen.

§ 5.

Verallgemeinerung eines in § 2 bewiesenen Satzes.

Ist der Außenrand eines Gebietes $\mathfrak{G}$ eine Jordansche Kurve J, so muß diese nach Satz 5 geschlossen sein; sind also A und B zwei äußere Randpunkte von $\mathfrak{G}$, so gibt es immer zwei verschiedene Teilbogen von J, welche A mit B verbinden. Wird hingegen über die Art des Außenrands $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ nichts vorausgesetzt, so gilt das Entsprechende nicht mehr, d. h. es kann dann nicht mehr die Existenz zweier zu $\mathfrak{R}$ gehöriger, A mit B verbindender Kontinua behauptet werden, welche außer A und B keinen Punkt gemein haben[14]). Wohl aber gestattet Satz 4 eine Verallgemeinerung nach dieser Richtung und zwar nimmt derselbe alsdann die folgende Form an:

Satz 9. *Werden um zwei beliebige Punkte A und B des Außenrandes $\mathfrak{R}$ eines beliebigen Gebietes $\mathfrak{G}$ zwei einander ausschließende Kreise K und K' beschrieben, so sind in $\mathfrak{R}$ stets zwei Kontinua enthalten, deren jedes K mit K' verbindet und welche keinen Punkt miteinander gemein haben*[15]).

Beweis. Zunächst werde wie beim Beweise des Satzes 4 die Ebene durch zwei innerhalb K bzw. K' gelegene Quadrate $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ und zwei Streckenzüge s_i und s_u in vier Gebiete $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zerlegt. Ist nun Π ein beliebiges Polygon, welches $\mathfrak{G}$ einschließt, so muß dasselbe auch s_i einschließen, hingegen, sofern die Approximation von $\mathfrak{R}$ durch Π eine hinreichend scharfe ist, s_u ausschließen, mithin s_i und s_u voneinander trennen. Daraus folgt mit Hilfe des Satzes 3a sofort, daß es ein Stück Π' des Polygonrandes geben muß, welches $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}'$ durch $\mathfrak{A}$ hindurch verbindet, und ein zweites, Π'', welches $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}'$ durch $\mathfrak{B}$ hindurch verbindet. Läßt man nun Π eine

[14]) Beispiel: $\mathfrak{R}$ bestehe aus drei Seiten AB, BC, CD eines Quadrats und einem unendlichen Streckenzuge, welcher in D beginnt und die ganze Strecke AB approximiert; von den beiden A mit B verbindenden Kontinua ist hier das eine (nämlich die Strecke AB) in dem anderen vollständig enthalten. Beispiele, bei denen überhaupt nur *ein* A und B enthaltendes Kontinuum vorhanden ist, hat Herr Brouwer zuerst gegeben. (Zur Analysis situs, Math. Ann. 68 (1910), S. 422.)

[15]) Speziell geht aus dem Satze hervor, daß $\mathfrak{R}$ selbst stets ein Kontinuum ist (vgl. Phragmén, Acta math. 7 (1885), S. 45), ferner (durch Hinzunahme von Satz 1), daß $\mathfrak{R}$ niemals eine offene Jordansche Kurve j enthalten kann, es sei denn, daß sich in der Umgebung *jedes* der beiden Endpunkte von j noch anderweitige Punkte von $\mathfrak{R}$ befinden.

Folge von $\mathfrak{R}$ immer schärfer approximierenden Polygonen jener Art durchlaufen, so bilden nach[16]) Satz 8 die (offenbar zu $\mathfrak{R}$ gehörigen) Näherungspunkte aller Streckenzüge Π' [bzw. Π''] ein Kontinuum $\mathfrak{k}'$ [bzw. $\mathfrak{k}''$], welches ebenfalls $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}'$ durch $\mathfrak{A}$ [bzw. durch $\mathfrak{B}$] hindurch verbindet, da ja $\mathfrak{k}'$ und $\mathfrak{k}''$ als Bestandteile von $\mathfrak{R}$ weder mit s_i noch mit s_u einen Punkt gemein haben können. $\mathfrak{k}'$ und $\mathfrak{k}''$ haben daher auch miteinander keinen Punkt gemein.

---

[16]) Um die Existenz je eines *inneren* Näherungspunktes der Streckenzüge Π' und Π'' sicherzustellen, genügt es ja, die Folge Π nötigenfalls durch eine geeignet gewählte Teilfolge zu ersetzen. (In Wahrheit ist hier jeder Näherungspunkt zugleich ein innerer Näherungspunkt.)

(Eingegangen am 30. Juni 1924.)

Mehrfach monotone Zahlenfolgen.

Von

Konrad Knopp in Königsberg.

In der Theorie der unendlichen Reihen steht neben der Untersuchung er Reihen mit *beliebigen positiven* Gliedern unvermittelt diejenige der Reihen mit positiven *monoton abnehmenden* Gliedern. Die hier gültigen Gesetze sind von den dort geltenden durch eine unüberbrückte Kluft getrennt. So ist, um nur ein Beispiel zu nennen,

$$a_n \to 0$$

das äußerste, was sich generell über das Kleinwerden der Glieder konvergenter Reihen Σa_n mit $a_n \geqq 0$ sagen läßt. Dagegen muß sogar

$$n a_n \to 0$$

abnehmen, falls die a_n *monoton* fallen. Und genau wie diese notwendige Konvergenzbedingung stehen die hinreichenden Konvergenzkriterien für beide Reihenarten unvermittelt nebeneinander.

Von E. Jacobsthal[1]) und mir[2]) wurde zuerst in einem speziellen Falle der Nutzen des Begriffs der p-fachen Monotonie (p positiv-ganz) der Reihenglieder a_n gezeigt, und es liegt nahe, diesen Begriff auf die soeben angedeuteten Fragen anzuwenden. Zu befriedigenden Ergebnissen gelangt man dabei indessen erst, wenn man diesen Begriff auf *nicht-ganze p* ausdehnt. Das soll in § 1 durchgeführt und in § 2 einige Anwendungen auf die Theorie der Reihen mit positiven Gliedern gegeben werden.

Da die Feststellung der Monotonie einer Zahlenfolge (x_n) auf der Bildung der zugehörigen Differenzen $\Delta^k x_n$ beruht, so wird man zur Definition einer Monotonie von nicht-ganzzahliger Ordnung derjenigen der *Differenzen* von nicht-ganzzahliger Ordnung bedürfen. Solche Differenzen

[1]) E. Jacobsthal, *Mittelwertbildung und Reihentransformation*, Mathematische Zeitschrift **6** (1920), S. 100—117.

[2]) K. Knopp, *Mittelwertbildung und Reihentransformation*, ebenda S. 118—123.

sind zuerst — mehr beiläufig — von S. Chapman[3]) benutzt und dann sehr eingehend von A. F. Andersen[4]) untersucht worden. Es zeigte sich dabei, daß viele Sätze, die für ganzzahlige Ordnungen trivial sind, für nicht-ganzzahlige Ordnungen gar nicht oder nur in beschränktem Maße gültig sind. So ist es für positiv-ganze Ordnungen r und s trivial, daß

$$\Delta^r(\Delta^s x_n) = \Delta^{r+s} x_n$$

ist. Für Differenzen nicht-ganzzahliger Ordnungen (Definition s. § 1) ist das nicht mehr allgemein gültig. Wir entnehmen der Arbeit von A. F. Andersen darüber den folgenden Satz, dessen Beweis, ohne prinzipielle Schwierigkeiten zu bieten, doch nicht ganz einfach ist:

Satz. *Ist* (x_n) *eine Nullfolge, so ist*

$$\Delta^s(\Delta^r x_n) = \Delta^{r+s} x_n,$$

falls $s \geqq -1$, $r \geqq 0$ *und* $r+s \geqq 0$ *ist*[5]).

§ 1.

Im Hinblick auf die späteren Anwendungen beschränken wir uns auf die Betrachtung von Zahlenfolgen

$$(x_n) \qquad x_0, x_1, x_2, \ldots,$$

deren Glieder $\geqq 0$ sind und gegen 0 streben, also auf *positive Nullfolgen* (x_n).

Für ganzzahlige $p \geqq 1$ setzen wir, wie üblich,

$$\Delta^p x_n = \binom{p}{0} x_n - \binom{p}{1} x_{n+1} + - \ldots + (-1)^p \binom{p}{p} x_{n+p}$$

und $\Delta^0 x_n = x_n$, bilden also $\Delta^p x_n$ durch Komposition der Folge $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+\nu}, \ldots$ mit der Folge der Entwicklungskoeffizienten $(-1)^\nu \binom{p}{\nu} = \binom{\nu-p-1}{\nu}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, von $(1-x)^p$. Benutzt man für beliebige reelle α dasselbe Bildungsgesetz, so erhält man die unendliche Reihe

$$(\Delta) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu-\alpha-1}{\nu} x_{n+\nu},$$

und wir können schon definieren:

---

[3]) S. Chapman, *On non integral orders of summability of series and integrals*, Proceedings of the London Mathematical Society (2), 9 (1910), S. 369—409.

[4]) A. F. Andersen, Studier over Cesàro's Summabilitetsmetode, Kopenhagen 1921.

[5]) Für andere Wertepaare (r, s) ist die Beziehung des Satzes auch für Nullfolgen nicht mehr allgemein richtig.

Definition 1. *Ist α beliebig reell und die Reihe (Δ) konvergent, so oll ihre Summe als α-te Differenz von x_n und mit $\Delta^\alpha x_n$ bezeichnet erden.*

Da die x_k beschränkt und die Koeffizienten $\binom{\nu-\alpha-1}{\nu}$ in (Δ) für $\geqq[\alpha]+1$ offenbar von einerlei Vorzeichen sind, so ist (Δ), wenn überaupt, auch stets *absolut* konvergent. Im Falle der Divergenz ist diese ine *bestimmte* und wir sagen dann, daß die α-te Differenz von x_n *nicht xistiere*. Für den in der Folge besonders wichtigen Fall, daß $\alpha \geqq 0$ ist, ilt der einfache

Satz 1. *Für eine positive Nullfolge (x_n) existieren die Differenzen $^\alpha x_n$ für jeden Index n und für jede Ordnung $\alpha \geqq 0$.* [6])

Der Beweis ergibt sich einfach daraus, daß $\sum\binom{\nu-\alpha-1}{\nu}$ als Entwickung von $(1-x)^\alpha$ in $x=+1$ für $\alpha \geqq 0$ noch konvergiert, also absolut onvergiert, und daß die x_n beschränkt sind.

Ebenso einfach ergibt sich der

Satz 2. *Die Differenzen $\Delta^\alpha x_n$ einer (positiven) Nullfolge (x_n) ilden für jedes feste $\alpha \geqq 0$ wieder eine Nullfolge.*

Bezeichnet man nämlich mit $\bar{x}_n$ die größte der Zahlen $x_n, x_{n+1}, \ldots$ nd mit A_α die Summe der soeben als konvergent erkannten Reihe $\sum\left|\binom{\nu-\alpha-1}{\nu}\right|$, so ist

$$|\Delta^\alpha x_n| \leqq \bar{x}_n \cdot A_\alpha$$

nd strebt also für $n \to \infty$ gegen 0.

Wir definieren nun:

Definition 2. *Die positive Nullfolge soll α-fach monoton genannt werden ($\alpha \geqq 0$ beliebig), wenn die α-ten Differenzen*

$$\Delta^\alpha x_n \geqq 0$$

ind für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Beispiel. Sind (y_n) und (z_n) zwei einfach monotone positive Nullolgen und ist stets $0 < z_n < \frac{1}{2}(y_n - y_{n+1})$, so ist die Folge

$$(x_n) \equiv y_0,\quad y_0+z_0,\quad y_1,\quad y_1+z_1,\quad y_2,\quad y_2+z_2, \ldots$$

war nicht einfach, wohl aber $\frac{1}{2}$-fach monoton, denn es ist, wie man leicht erifiziert,

$$\Delta^{\frac{1}{2}} x_n = x_n - \frac{1}{2}x_{n+1} - \frac{1}{2\cdot 4}x_{n+2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 8}x_{n+3} - \ldots > 0$$

ür jedes $n = 0, 1, 2, \ldots$.

[6]) Dies gilt, wie der Beweis zeigt, auch für jede *beschränkte* Folge (x_n).

Die wichtigste hier auftauchende Frage ist nun die, ob aus der α-fachen Monotonie einer positiven Nullfolge (x_n) auch ihre β-fache Monotonie folgt, wofern nur $0 \leqq \beta \leqq \alpha$ ist. *Dem ist in der Tat so.* Wir beweisen dazu zunächst die folgenden einfachen Sätze:

Satz 3. *Ist* $\alpha \geqq 0$ *beliebig, so ist*

$$\Delta^\alpha x_n = \Delta^k (\Delta^{\alpha-k} x_n)$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots, [\alpha]$.

Beweis. Ist $[\alpha] = 0$, so ist hier nichts zu beweisen. Ist $\alpha \geqq 1$, so ist

$$\Delta^{\alpha-1} x_n = x_n + \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{\nu-\alpha}{\nu} x_{n+\nu}$$

$$\Delta^{\alpha-1} x_{n+1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{\nu-1-\alpha}{\nu-1} x_{n+\nu},$$

also

$$\Delta^{\alpha-1} x_n - \Delta^{\alpha-1} x_{n+1} = x_n + \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{\nu-\alpha-1}{\nu} x_{n+\nu} = \Delta^\alpha x_n,$$

d. h.

$$\Delta^\alpha x_n = \Delta(\Delta^{\alpha-1} x_n).$$

Ist noch $\alpha - 1 \geqq 1$, so ist nach dem eben bewiesenen Ergebnis

$$\Delta^{\alpha-1} x_n = \Delta(\Delta^{\alpha-2} x_n), \quad \text{also} \quad \Delta^\alpha x_n = \Delta^2(\Delta^{\alpha-2} x_n), \quad \text{usw.}$$

Und fast ebenso beweist man den

Satz 4. *Ist* $\alpha \geqq 0$ *beliebig, so ist*

$$\Delta^\alpha x_n = \Delta^{\alpha-k}(\Delta^k x_n)$$

für $k = 0, 1, \ldots, [\alpha]$.

Aus Satz 3 folgert man noch leicht den

Satz 5. *Ist* $\alpha \geqq 0$ *und* (x_n) α*-fach monoton, so ist diese Folge auch* $(\alpha - k)$*-fach monoton für* $k = 0, 1, \ldots, [\alpha]$.

Beweis. Für $[\alpha] = 0$ ist wieder nichts zu beweisen. Für $\alpha \geqq 1$ ist nach Voraussetzung $\Delta^\alpha x_n \geqq 0$ für alle n. Nach Satz 3 ist also $\Delta^{\alpha-1} x_n - \Delta^{\alpha-1} x_{n+1} \geqq 0$, was besagt, daß $\Delta^{\alpha-1} x_n$ einfach monoton fällt. Da es nach Satz 2, weil noch $\alpha - 1 \geqq 0$ ist, $\to 0$ strebt, so ist für alle n stets $\Delta^{\alpha-1} x_n \geqq 0$, die Folge (x_n) somit $(\alpha-1)$-fach monoton. Durch Wiederholung dieses Schlusses ergibt sich die $(\alpha - k)$-fache Monotonie von (x_n) für jedes ganze $k \geqq 0$, für das $\alpha - k \geqq 0$ ist, w. z. b. w.

Jetzt sind wir in der Lage die aufgeworfene Hauptfrage zu beantworten. Es gilt der

Satz 6. *Ist die positive Nullfolge* (x_n) α*-fach monoton* $(\alpha \geqq 0)$ *und* $0 \leqq \beta \leqq \alpha$, *so ist* (x_n) *auch* β*-fach monoton.*

Beweis. a) Es sei zunächst $0 \leqq \alpha \leqq 1$. Da für $\beta = 0$ und $\beta = \alpha$ ichts zu beweisen ist, so dürfen wir $\alpha > 0$ und $0 < \beta < \alpha$ voraussetzen. ann ist $0 < \delta < 1$, wenn wir $\alpha = \beta + \delta$ setzen.

Nach dem in der Einleitung erwähnten Satze von A. F. Andersen t demnach

$$\Delta^{-\delta}(\Delta^{\alpha} x_n) = \Delta^{\beta} x_n .$$ [7])

etzen wir also $\Delta^{\alpha} x_n = y_n$, so sind nach Voraussetzung alle $y_n \geqq 0$. Dann t aber, da in der Entwicklung

$$\Delta^{\beta} x_n = \Delta^{-\delta} y_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{\lambda - 1 + \delta}{\lambda} y_{n+\lambda}$$

echterhand alle Glieder positiv sind, auch für alle n

$$\Delta^{\beta} x_n \geqq 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

b) Ist nun $\alpha > 1$, so sei

$$p = [\alpha], \text{ wenn } \alpha \textit{ nicht ganz}, \text{ dagegen}$$

$$p = \alpha - 1, \text{ wenn } \alpha \textit{ ganz} \text{ ist},$$

nd in beiden Fällen

$$\alpha = p + \alpha',$$

o daß $0 < \alpha' \leqq 1$ ist. Setzen wir dann

$$\Delta^{p} x_n = z_n,$$

o ist nach Satz 4

$$\Delta^{\alpha} x_n = \Delta^{\alpha'} z_n,$$

lso (z_n) eine α'-fach monotone positive Nullfolge.

Nach a) ist dann (z_n) auch β'-fach monoton, falls $0 \leqq \beta' \leqq \alpha'$. Für lle n ist also $\Delta^{\beta'} z_n \geqq 0$, was, wiederum nach Satz 4, bedeutet, daß uch stets

$$\Delta^{\beta} x_n \geqq 0$$

st für $\beta = p + \beta'$. Hiernach ist (x_n) jedenfalls β-fach monoton, falls $p \leqq \beta \leqq \alpha$ ist; insbesondere ist unsere Folge p-fach monoton. Wiederholt man den oben durchgeführten Beweis, nachdem man in der Voraussetzung α durch p ersetzt hat, so findet man, daß (x_n) auch β-fach monoton ist,

[7]) Durch eine etwas andere Beweisanordnung läßt sich die Berufung auf den Andersenschen Satz vermeiden, wie mir Herr Kaluza, der das Manuskript der vorliegenden Note eingesehen hatte, mitteilte.

falls $p-1 \leqq \beta \leqq p$ ist, und kann so für alle $\beta \geqq 0$ weiterschließen. Also ist (x_n) auch β-fach monoton, falls nur $0 \leqq \beta \leqq \alpha$ ist[8]).

Auf Grund dieses Satzes gelangt man in bekannter Weise zum Begriff eines *Index der Monotonie*:

Definition 3. *Ist die positive Nullfolge (x_n) für ein gewisses $\alpha > 0$ α-fach monoton, ohne daß sie es für jedes $\alpha > 0$ ist, so gibt es eine wohlbestimmte positive Zahl α_0, so daß (x_n) für jedes positive ε zwar $(\alpha_0 - \varepsilon)$-fach aber nicht $(\alpha_0 + \varepsilon)$-fach monoton ist. Diese Zahl α_0 soll der Index der Monotonie der Folge (x_n) genannt werden. Ist die Folge (x_n) von keiner positiven Ordnung monoton, so setzen wir $\alpha_0 = 0$, ist sie von jeder positiven Ordnung monoton, so nennen wir sie voll-monoton und setzen $\alpha_0 = +\infty$.*

§ 2.

Wir wenden nun die Ausführungen des vorigen Paragraphen auf die Untersuchung von unendlichen Reihen Σa_n an, deren Glieder eine α-fach monotone Nullfolge bilden, und beweisen den folgenden

Satz 7. *Ist die Reihe Σa_n mit positiven Gliedern konvergent und ist die Folge ihrer Glieder (a_n) α-fach monoton, so existieren für jedes β mit $0 \leqq \beta \leqq \alpha$ die Differenzen $\Delta^{\beta-1} a_n$ und es strebt*

$$n^\beta \Delta^{\beta-1} a_n \to 0.$$

Beweis. Da eine α-fach monotone Folge (a_n) nach Satz 6 auch β-fach monoton ist, falls nur $0 \leqq \beta \leqq \alpha$ ist, so genügt es natürlich, aus den Voraussetzungen des Satzes zu folgern, daß die Differenzen $\Delta^{\alpha-1} a_n$ existieren und daß

$$n^\alpha \Delta^{\alpha-1} a_n \to 0$$

strebt.

a) *Wir beweisen diese Behauptung zunächst nur für den Fall, daß $0 \leqq \alpha \leqq 1$ ist.* Für $\alpha = 0$ besagt dies aber nur, daß die Reste $r_n = a_n + a_{n+1} + \ldots$ existieren und daß $r_n \to 0$ strebt. Für $\alpha = 1$ haben wir den bekannten in der Einleitung erwähnten Reihensatz vor uns, den wir hier so beweisen wollen:

---

[8]) Daß jede einfach monotone Folge (x_n) für $0 < \beta < 1$ auch β-fach monoton ist, erkennt man ganz direkt aus

$$\Delta^\beta x_n = x_n - \binom{\beta}{1} x_{n+1} + \binom{\beta}{2} x_{n+2} - + \ldots .$$

Denn da die Koeffizienten von $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ sämtlich negativ sind und die x_ν einfach monoton abnehmen, so ist

$$\Delta^\beta x_n \geqq x_n \left\{1 - \binom{\beta}{1} + \binom{\beta}{2} - + \ldots\right\} = 0.$$

Für $n \geqq 0$ ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)(a_\nu - a_{\nu+1}) + (n+1)\, a_{n+1}.$$

us der Konvergenz von Σa_n folgt also diejenige von

$$\Sigma (n+1)\, \Delta a_n,$$

a sie unter der jetzigen Annahme positive Glieder hat, aber kleinere eilsummen als a_n selber. Dann konvergiert auch

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} (\nu+1)\, \Delta a_\nu$$

nd hat eine Summe, die mit $n \to \infty$ gegen 0 strebt. Erst recht ist dies ann mit der Summe von

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} n(a_\nu - a_{\nu+1}) = n \sum_{\nu=n}^{\infty} (a_\nu - a_{\nu+1}) = n\, a_n$$

er Fall. Also strebt $n\, a_n \to 0$.

Ist nun $0 < \alpha < 1$, so zeigen wir ganz ähnlich, daß

1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n} \Delta^\alpha a_n$$

onvergiert. In der Tat, bezeichnen wir die Glieder dieser Reihe mit a'_n,) ist

$$a'_\nu = \binom{\nu+\alpha}{\nu} \left[a_\nu + \binom{-\alpha}{1} a_{\nu+1} + \binom{1-\alpha}{2} a_{\nu+2} + \dots \right].$$

n der eckigen Klammer sind hier wegen $0 < \alpha < 1$ außer dem Anfangs- iede a_ν alle Summanden negativ, also für jedes $n \geqq \nu$

$$a'_\nu \leqq \binom{\nu+\alpha}{\nu} \left[a_\nu + \binom{-\alpha}{1} a_{\nu+1} + \dots + \binom{n-\nu-1-\alpha}{n-\nu} a_n \right]$$

nd folglich ist für $n \geqq 0$

$$= a'_0 + a'_1 + \dots + a'_n \leqq \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+\alpha}{\nu} \left[a_\nu + \binom{-\alpha}{1} a_{\nu+1} + \dots + \binom{n-\nu-1-\alpha}{n-\nu} a_n \right].$$

ies ist aber weiter

$$= a_0 + a_1 + \dots + a_n = s_n,$$

enn der Koeffizient von a_m, $0 \leqq m \leqq n$, in der letzten Summe ist

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \binom{\nu+\alpha}{\nu} \binom{m-\nu-1-\alpha}{m-\nu} = 1,$$

ie man durch Multiplikation der Entwicklungen von $\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}}$ und $\frac{1}{(1-x)^{-\alpha}}$

erkennt. Die Reihe (1) hat also positive Glieder, aber nicht größere Teilsummen als Σa_n und ist also gleich dieser konvergent[9]).

Für jedes $n \geqq 0$ konvergiert nun auch die Reihe

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu+\alpha}{\nu} \Delta^{\alpha} a_{\nu}, \tag{2}$$

und wenn wir ihre Summe mit R_n bezeichnen, so strebt $R_n \to 0$. Da aber $\binom{\nu+\alpha}{\nu}$ wegen $\alpha > 0$ mit ν monoton wächst, so ist mit (2) auch die Reihe

$$\binom{n+\alpha}{n} \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta^{\alpha} a_{\nu} \tag{3}$$

konvergent, und wenn wir ihre Summe mit R_n' bezeichnen, so strebt auch $R_n' \to 0$. Mit (3) konvergiert aber auch die Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \Delta^{\alpha} a_{n+\lambda} = \Delta^{\alpha} a_n + \Delta^{\alpha} a_{n+1} + \dots, \tag{4}$$

was nichts anderes besagt, als daß $\Delta^{-1}(\Delta^{\alpha} a_n)$ existiert. Wir werden nun zeigen, daß unter unsern Annahmen

$$\Delta^{-1}(\Delta^{\alpha} a_n) = \Delta^{\alpha-1} a_n \tag{5}$$

ist[10]). In der Tat sind, wie betont, in

$$\Delta^{\alpha} a_k = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{\lambda-1-\alpha}{\lambda} a_{k+\lambda} \tag{5a}$$

alle Glieder außer dem Anfangsglied a_k negativ. Daher sind in

$$a_k - \Delta^{\alpha} a_k = \sum_{\lambda=1}^{\infty} - \binom{\lambda-1-\alpha}{\lambda} a_{k+\lambda}$$

rechterhand alle Summanden positiv. Nun ist aber mit Σa_n und $\Sigma \Delta^{\alpha} a_n$ auch die Reihe

$$\sum_{k=n}^{\infty} (a_k - \Delta^{\alpha} a_k) = \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} - \binom{\lambda-1-\alpha}{\lambda} a_{k+\lambda} \tag{5b}$$

konvergent. Und da jetzt rechts alle Summanden positiv sind, dürfen wir beliebig umordnen. Sammeln wir die Größen mit demselben a_q, so wird die Summe

---

[9]) M. a. W.: Es existiert die Differenz $\Delta^{-\alpha-1}(\Delta^{\alpha} a_0)$. — Aus obigem folgt aber noch nicht, daß sie $= \Delta^{-1} a_0$, d. h. $= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ ist.

[10]) Aus dem allgemeinen Satz von F. A. Andersen (s. Einleitung) ist das nicht zu entnehmen.

$$= \sum_{q=n}^{\infty} \left[\sum_{\lambda=1}^{q-n} - \binom{\lambda-1-\alpha}{\lambda} \right] a_q$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[1 - \binom{\nu-\alpha}{\nu} \right] a_{n+\nu}.$$

Daher ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^{\alpha} a_{n+\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu-\alpha}{\nu} a_{n+\nu} = \Delta^{\alpha-1} a_n,$$

womit (5) bewiesen. Setzen wir dies in die Summe (3) für R_n' ein, so folgt wegen $\binom{n+\alpha}{n} \sim n^{\alpha}$ endlich die Behauptung

(6) $$n^{\alpha} \Delta^{\alpha-1} a_n \to 0.$$

b) *Es sei jetzt* $\alpha > 1$. Dann können wir wieder zeigen, daß die Reihe

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n} \Delta^{\alpha} a_n$$

konvergiert. Denn zunächst ist allgemein für $\beta > 0$

(7) $$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+\beta}{\nu} \Delta^{\beta} a_{\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+\beta+1}{\nu} \Delta^{\beta+1} a_{\nu} + \binom{n+\beta+1}{n} \Delta^{\beta} a_{n+1},$$

wie man aus der Formel der Abelschen partiellen Summation

$$\sum_{\nu=0}^{n} (A_{\nu} - A_{\nu-1}) B_{\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} A_{\nu} (B_{\nu} - B_{\nu+1}) + A_n B_{n+1}$$

sofort erkennt, wenn man $\binom{\nu+\beta+1}{\nu} = A_{\nu}$, $A_{-1} = 0$ und $\Delta^{\beta} a_{\nu} = B_{\nu}$ setzt und wegen $\Delta \Delta^{\beta} a_{\nu}$ Satz 3 heranzieht. Aus (7) folgt aber unmittelbar:

Sind die Differenzen $\Delta^{\beta} a_n$ *und* $\Delta^{\beta+1} a_n$ *sämtlich* $\geqq 0$, *so ist mit*

(7) $$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\beta}{n} \Delta^{\beta} a_n \quad \textit{auch} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\beta+1}{n} \Delta^{\beta+1} a_n$$

konvergent. Denn beide Reihen haben positive Glieder und die Teilsummen der letzten sind höchstens so groß wie die der ersten.

Wir setzen nun wie in § 1

$p = [\alpha]$, wenn α *nicht ganz* ist, und

$p = \alpha - 1$, wenn α *ganz* ist,

und in beiden Fällen

$$\alpha = p + \delta, \quad \text{so daß} \quad 0 < \delta \leqq 1$$

ist. Auf Grund von Satz 6 ist die Folge (a_n) dann jedenfalls auch $(k+\delta)$-fach monoton, d. h.

$$\Delta^{k+\delta} a_n \geqq 0$$

für $k = 0, 1, \ldots, p$ und alle $n \geqq 0$.

Da hiernach die Folge (a_n) insbesondere δ-fach monoton und $0 < \delta \leqq 1$ ist, so ist nach dem in a) durchgeführten Beweise die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\delta}{n} \Delta^{\delta} a_n \tag{8}$$

konvergent. Indem man jetzt (7) nacheinander für $\beta = \delta, \delta+1, \ldots, \delta+p-1$ anwendet, ergibt sich unmittelbar die Konvergenz der p Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \binom{\nu+k+\delta}{\nu} \Delta^{k+\delta} a_\nu \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

insbesondere also die der Reihe (1).[11])

Genau wie unter a) folgt nun aus der Konvergenz von (1), daß auch die Reihe

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n} \Delta^{\alpha} a_\nu = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^{\alpha} a_{n+\nu}$$

konvergiert und daß ihre Summe für $n \to +\infty$ gegen 0 strebt. Und da nun wieder (man hat vor der Umordnung der Reihe (5b) nur $(p+1)$ Glieder der Reihe (5a) an Stelle eines einzigen nach links zu bringen)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^{\alpha} a_{n+\nu} = \Delta^{\alpha-1} a_n$$

ist, so strebt auch $n^{\alpha} \Delta^{\alpha-1} a_n \to 0$, womit alles bewiesen ist.

Aus Satz 7 folgern wir noch leicht den

Satz 8. *Ist Σa_n eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern, ist (a_n) eine α-fach monotone Folge und $0 \leqq \alpha \leqq 1$, so strebt*

$$n^{\alpha} a_n \to 0. \tag{9}$$

Beweis. Nach Satz 7 strebt

$$n^{\alpha} \Delta^{\alpha-1} a_n = n^{\alpha} \left[a_n + \binom{1-\alpha}{1} a_{n+1} + \binom{2-\alpha}{2} a_{n+2} + \ldots \right] \to 0.$$

Da jetzt wegen $0 \leqq \alpha \leqq 1$ kein Summand in der eckigen Klammer negativ ist, so strebt erst recht $n^{\alpha} a_n \to 0$, w. z. b. w.

Nur wegen der prägnanten Erweiterung (9) der klassischen Relation $n a_n \to 0$ für konvergente Reihen mit (einfach) monoton abnehmenden

[11]) Aus Satz 7 selbst folgt dann weiter, daß alle diese Reihen dieselbe Summe haben.

Gliedern haben wir die vorstehenden Sätze für unendliche Reihen mit positiven Gliedern ausgesprochen. Diese sind aber nichts anderes als (mindestens) einfach monotone Zahlenfolgen, die wir uns wieder als positive Nullfolgen geschrieben denken können. Ist nämlich Σa_n eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern, sind s_n ihre Teilsummen und ist s ihre Summe, so bilden die Zahlen

$$x_n = s - s_{n-1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ s_{-1} = 0)$$

offenbar eine $(\alpha+1)$-fach monotone positive Nullfolge, wenn die a_n eine α-fach monotone Folge waren. Ist umgekehrt (x_n) eine $(\alpha+1)$-fach monotone positive Nullfolge $(\alpha \geqq 0)$, so ist

$$\Sigma a_n \quad \text{mit} \quad a_n = x_n - x_{n+1}$$

eine konvergente Reihe mit positiven, α-fach monoton gegen 0 strebenden Gliedern. Satz 7 erhält dann die folgende Form, die nun ihrerseits mancherlei Erweiterungen nahelegt:

Satz 9. *Ist für* $n = 0, 1, 2, \ldots$

a) $\quad x_n = o(1)$,

b) $\quad \Delta^\alpha x_n \geqq 0$ *für ein* $\alpha \geqq 1$,

so ist für jedes β *in* $0 \leqq \beta \leqq \alpha - 1$

$$\Delta^\beta x_n = o\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$ [12])

[12]) Da die Differenzen positiver Ordnung für die Folgen (x_n) und $(x_n + c)$ übereinstimmen, so gilt die Behauptung dieses Satzes auch dann noch, wenn $0 < \beta \leqq \alpha - 1$ ist und a) durch $x_n = O(1)$ ersetzt wird.

(Eingegangen am 5. Juli 1924.)

Über die Erzeugung der Flächen 2. Grades durch korrelative Bündel.

Von

Friedrich Schur in Breslau.

In der Festschrift zu Heinrich Webers 70. Geburstage (Leipzig, B. G. Teubner 1911, S. 291) habe ich die bis dahin fehlende Verbindung aller Korrelationen zwischen den Bündeln mit zwei gegebenen Zentren entwickelt, die eine gegebene Fläche 2. Grades erzeugen. Sie ist dargestellt durch den folgenden Satz:

Sollen zwei Bündel $[S]$ *und* $[S']$, *der Zentren* S *und* S' *der Fläche 2. Grades* $\mathfrak{F}$ *angehören, so korrelativ bezogen werden, daß sie* $\mathfrak{F}$ *als Ort der Schnittpunkte der Strahlen des einen Bündels mit den ihnen entsprechenden Ebenen des anderen erzeugen, so wähle man irgendeine der Nullkorrelationen, in der* SS' *und seine reziproke Polare* s *für* $\mathfrak{F}$ *einander zugeordnet sind, und ordne jedem Strahle* SP *die Ebene durch* S' *und den dem Strahle* SP *in der Nullkorrelation zugeordneten Strahl zu. Artet die Nullkorrelation dahin aus, daß jedem Punkte die Ebene durch* s *entspricht, so wird jede Ebene durch* s *von einem Strahle und der ihm korrelativen Ebene in dem Pole und seiner Polare für den in der Ebene liegenden Kegelschnitt der Fläche* $\mathfrak{F}$ *getroffen.*

Dem rein geometrischen Beweise dieses Satzes fügte ich noch einen analytischen hinzu (vgl. auch Mehmke, Über die Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung usw., Jahresber. d. d. Math. Ver. **24** (1915), S. 58), weil jener sich auf Sätze von Heinr. Schröter stützte, deren Beweise selbst nicht einfach genug gegeben waren. Inzwischen fand ich den folgenden wesentlich einfacheren geometrischen Beweis. Wir setzen hierbei die Polarentheorie der Flächen 2. Grades voraus und beweisen nur den folgenden deren Zusammenhang mit ihrer Erzeugung ausdrückenden Satz von H. Schröter:

1. Hilfssatz. *Die Polarebene eines Punktes* P *in bezug auf das Erzeugnis* $\mathfrak{F}$ *zweier korrelativer Bündel durch* S *und* S' *ist die von* P *durch die den Strahlen* SP *und* $S'P$ *in dem jedesmaligen andern Bündel entsprechenden Ebenen harmonisch getrennte Ebene.*

Entspricht nämlich dem Strahle SP (Fig. 1), der $\mathfrak{F}$ außerdem in Q hneiden mag, die Ebene $\pi' = S'QT$, wo T der zweite Schnittpunkt eser Ebene mit dem Kegelschnitte k von in irgendeiner Ebene τ durch SP ist, also em Strahle $S'T$, der in π' liegt, umgekehrt ie Ebene τ, so entspricht dem Strahle $S'P$ es zweiten Bündels die Ebene SRQ' des sten, wo $R = (PT, \mathfrak{F})$ und $Q' = (S'P, \mathfrak{F})$ t. Denn dem Strahle SR entspricht die bene $S'TR$, die P enthält, also dem $S'P$ ne Ebene durch SR. Die SP und $S'P$ ntsprechenden Ebenen haben daher mit dem egelschnitte k die Sehnen QT und RS ge-

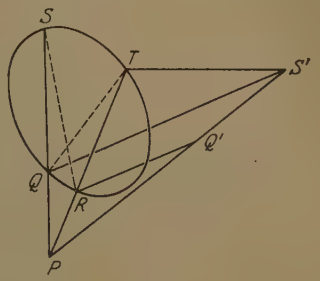


Fig. 1.

hein, so daß die von P durch diese Ebene harmonisch getrennte Ebene ie Ebene τ in der Polare von P in bezug auf k schneidet.

Ist P ein Punkt der Fläche selbst, so wird zwar die im Satze beeichnete Ebene unbestimmt, aber man sieht leicht, daß die Schnittlinie q er beiden den Strahlen PS und PS' in dem jedesmaligen anderen Bündel ntsprechenden Ebenen eine Tangente von P ist. Denn legen wir dann τ urch q, so entspricht dem Strahlenbüschel in der Ebene Sq das Ebenenüschel durch $S'P$, dem Strahle SP also eine Ebene durch die Tangente es Kegelschnittes der Ebene Sq, q ist also diese Tangente.

Hieraus ergibt sich nunmehr der folgende Satz:

2. Hilfsatz. *Wird eine Fläche 2. Grades $\mathfrak{F}$ durch die beiden korrelativen Bündel (S) und (S') erzeugt, und man ordnet jedem Punkte P als Nullebene die von der Polarebene von P durch die den Strahlen SP und $S'P$ in dem jedesmaligen anderen Büschel entsprechenden Ebenen harmonisch getrennte Ebene sowie den Punkten S und S' selbst deren Tangentialebenen zu, so ist diese Zuordnung eine Nullkorrelation.*

Daß hiernach jedem Punkte eine und nur eine ihn enthaltende Ebene ugeordnet ist, folgt aus dem Obigen. Es genügt daher zu beweisen, daß, venn P eine Gerade p beschreibt, die Nullebene sich um eine andere Gerade p_1 dreht. Nun drehen sich die drei Ebenen der Reihe nach um die reziproke Polare p' von p sowie um die den Ebenen Sp und $S'p$ in dem jedesmaligen anderen Bündel entsprechenden Strahlen l' und l und erzeugen eine Regelschar $\mathfrak{R}$, deren Leitlinien p', l' und l sind. Demnach dreht sich die Nullebene von P um die von p' durch l' und l auf der Leitschar von $\mathfrak{R}$ harmonisch getrennte Leitlinie p_1.

Dasselbe gilt auch in dem Falle, daß p eine Sehne SQ durch eins der beiden Zentren ist. Entspricht dann dem Strahle SQ die Ebene $\varkappa'$

durch S' und Q (Fig. 2), und schneidet die der Ebene $S'QS$ entsprechende Tangente t von S die $\varkappa'$ in T, so entspricht der Ebene STQ durch t und p die Schnittlinie von $SS'Q$ und $\varkappa'$ oder $S'Q$, der in der Ebene $\varkappa'$ durch die projektiven Strahlenbüschel (Q) und (S') erzeugte Kegelschnitt der Fläche $\mathfrak{F}$ hat demnach TQ zur Tangente in Q. Hieraus folgt, daß die reziproke Polare p' von p durch T läuft. Bewegt sich daher P auf der Geraden $p = SQ$, so drehen sich die ihm nach obiger Zuordnung entsprechenden Ebenen der Reihe nach um t, $\varkappa'$ bleibt fest, und um p' durch T in der Tangentialebene σ von S, folglich muß die Nullebene von P stets durch die von p' durch t und $\varkappa'$ harmonisch getrennte Gerade p_1 durch T in σ laufen. Daß dann den Strahlen p irgendeiner Ebene ε durch S die Strahlen p' eines Punktes E in σ projektiv entsprechen, folgt leicht mit Hilfe einer in ε gelegenen Geraden. Ebenso sieht man endlich, daß jedem Punkte P von SS' die Nullebene durch die reziproke Polare s von SS' entspricht, weil den Strahlen PS uud PS' dann die beiden Tangentialebenen σ' und σ von S' und S in der Korrelation entsprechen.

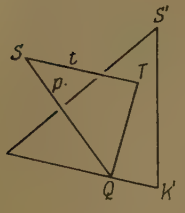


Fig. 2.

Wir sehen also, daß, sobald die Korrelation zwischen den beiden die Fläche $\mathfrak{F}$ erzeugenden Bündeln (S) und (S') etwa dadurch festgelegt ist, daß die irgendeinem Strahle SQ entsprechende Ebene $\varkappa'$ durch $S'Q$ gegeben ist, eine Nullkorrelation bekannt ist, in der SS' und deren reziproke Polare s einander zugeordnet sind, und jedem Strahle p durch S diejenige Gerade p_1 der Tangentialebene σ von S, welche durch die p in Bündel (S') korrelative Ebene ausgeschnitten wird. Haben wir umgekehrt eine Nullkorrelation, für die SS' und s zugeordnete Geraden sind, und das vollends dadurch bestimmt ist, daß die dem Punkte Q entsprechende Nullebene durch die SS' und s schneidende und Q enthaltende Gerade beliebig angenommen wird, so schneidet diese zugleich auf σ den p entsprechenden Strahl p_1 aus, bestimmt daher die dem Strahle p von $[S]$ im Bündel $[S']$ entsprechende Ebene $S'p_1$ und deshalb auch dieselbe Nullkorrelation wie nach unserem 2. Hilfssatze die beiden korrelativen Bündel $[S]$ und $[S']$. Nehmen wir jene Nullebene von Q durch s an, so artet die Nullkorrelation in dem Sinne aus, daß jedem Punkte P eine Nullebene durch s entspricht. Die beiden den Strahlen SP und $S'P$ in dem jedesmaligen anderen Bündel entsprechenden Ebenen schneiden sich also auf der Ebene Ps und zwar in der Polare von P in bezug auf den in dieser Ebene gelegenen Kegelschnitt von $\mathfrak{F}$. Hiermit ist unser Satz vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 23. Juli 1924.)

Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen*).

Von

Robert Schmidt in Königsberg.

Einleitung.

Die „Tauberian Theorems“ der Herren G. H. Hardy und J. E. Littlewood[1]) haben in erheblichem Maße das Interesse auf sich gezogen. Die Bedeutung dieser Sätze — sie sind Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes und der entsprechenden Sätze für andere Reihenentwicklungen, Verallgemeinerungen des Tauberschen Satzes[2]) — liegt wesentlich in ihrer Eigenschaft als Hilfsmittel der analytischen Zahlentheorie; aus einem „Tauberian Theorem“ für Dirichletsche Reihen konnten Hardy und Littlewood in wenigen Zeilen den Primzahlsatz herleiten[3]).

Die Beweise der Sätze haben ihren Entdeckern erhebliche Schwierigkeiten bereitet, sie sind äußerst verwickelt und keineswegs bequem lesbar. Eine ganze Reihe von Arbeiten anderer Autoren haben die Verschärfung und Verallgemeinerung jener Sätze, ferner die Verbesserung ihrer Beweise in Einzelheiten und ihre Übertragung auf ähnliche Fragen zum Gegenstande, eine grundsätzliche Neugestaltung des Beweisverfahrens selbst ist anscheinend jedoch nicht versucht worden. Mit der vorliegenden Unter-

*) Der wesentliche Inhalt dieser Arbeit hat der Philosophischen Fakultät der Universität Kiel unter dem gleichen Titel als Dissertation vorgelegen (Juli 1923).

[1]) Die grundlegenden Untersuchungen sind in den Proc. of the London Math. Society erschienen. Besonders: Littlewood, The Converse of Abel's Theorem, Ser. 2, **9** (1910), S. 434–448; Hardy-Littlewood, Tauberian Theorems concerning Power Series and Dirichlet's Series whose Coefficients are Positive. Ser. 2, **13** (1913), S. 174–191.

[2]) A. Tauber, Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. Monatsh. f. Math. u. Phys. **8** (1897), S. 273–277.

[3]) Hardy-Littlewood, New Proof of the Prime Number Theorem, Quarterly Journal of Pure and Applied Math. **46** (1915), S. 215–219.

suchung will ich eine systematische Behandlung dieses Hardy-Littlewoodschen Problemkreises in Angriff nehmen.

Die Natur der „Tauberian Theorems“ läßt es angemessen erscheinen, sie als *Umkehrsätze* bestimmter *linearer Mittelbildungen* (Limitierungsverfahren, Summierungsverfahren, Reihentransformationen), als *Mittelungsumkehrsätze* zu formulieren[4]). Diese Auffassung ist zwar allgemein üblich, aber bisher nicht durchgreifend ausgenutzt worden. Unter Voranstellung dieses Gesichtspunktes läßt sich der Charakter der „Tauberian Theorems“, ganz allgemein ausgedrückt, so beschreiben: *Es sei ein bestimmtes Limitierungsverfahren V vorgelegt. Aus der Konvergenz oder einem gewissen regelmäßigen infinitären Verhalten der V-Transformierten einer Folge* $s_1, s_2, \ldots$ *und einer zusätzlichen Bedingung für die Folge* $s_1, s_2, \ldots$ *wird darauf zurückgeschlossen, daß die Folge* $s_1, s_2, \ldots$ *selber konvergiert oder ein gewisses regelmäßiges infinitäres Verhalten aufweist.* — Ein solcher Satz kann mit Recht als Umkehrung eines Satzes bezeichnet werden, der etwa so zu charakterisieren wäre: *Es sei ein bestimmtes Limitierungsverfahren V vorgelegt. Aus der Konvergenz oder einem gewissen regelmäßigen infinitären Verhalten einer Folge* $s_1, s_2, \ldots$ *wird auf die Konvergenz oder ein gewisses regelmäßiges infinitäres Verhalten ihrer V-Transformierten geschlossen* („Abelian Theorems“).

Den Zugang zu den Mittelungsumkehrsätzen suche ich nun dadurch zu gewinnen, daß ich eine Fragestellung aufwerfe, die von den beiden soeben genannten durchaus verschieden ist, nämlich diese: *Es ist ein Bereich von Folgen* $s_1, s_2, \ldots$ *vorgelegt, die ein gewisses regelmäßiges infinitäres Verhalten haben. Welches sind die allgemeinsten linearen Mittelbildungen, die jede Folge des Bereiches in eine Folge mit einem vorgeschriebenen regelmäßigen infinitären Verhalten überführen?*

Es wird sich herausstellen, daß mit der vollständigen Beantwortung dieser Frage die Hauptschwierigkeit der Mittelungsumkehrsätze überwunden ist. Eine Frage dieser Art hat zum ersten Male Herr O. Toeplitz gestellt und beantwortet[5]). Herr Toeplitz gibt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen an, denen eine allgemeine lineare Mittelbildung genügen muß, damit sie jede konvergente Folge in eine konvergente Folge mit demselben Grenzwert überführt. Der betrachtete Bereich von Folgen

---

[4]) Man vgl. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, I. u. bes. II. Aufl., XIII. Kap.; Literaturangaben dort, § 59. Eine kurze Übersicht über den Problemkreis der „Tauberian Theorems“ gibt Herr Knopp in seinem Vortrag Leipzig 1922, Neuere Untersuchungen in der Theorie der divergenten Reihen, Jahresber. d. D. M. V. **32**, S. 43–67.

[5]) O. Toeplitz, Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace matematyczno-fizyczne 22, S. 113–119, Warschau 1911.

$_1, s_2, \ldots$ ist dort der aller konvergenten Folgen. Es liegt im Wesen ler Sache, daß man zur Behandlung von Umkehrsätzen, die zu verschiedenen Limitierungsverfahren gehören, im allgemeinen auch ganz verschiedene Bereiche zugrunde legen muß. Das bringt es mit sich, daß sich z. B. die Umkehrsätze für das Abelsche und das Borelsche Verfahren nicht gemeinsam erledigen lassen.

Im I. Abschnitt betrachte ich als Bereich von Folgen $s_1, s_2, \ldots$ mit einem gewissen regelmäßigen infinitären Verhalten denjenigen, der von den *gestrahlten* Folgen gebildet wird. Der Bequemlichkeit wegen führe ich vorher die Vergleichsfolgen ein: Eine Folge $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ ist eine *Vergleichsfolge*, wenn sie positiv ist und monoton wächst, und wenn der Quotient $\frac{\sigma_q}{\sigma_p}$ gegen einen endlichen positiven Grenzwert strebt, sobald $\frac{q}{p} = \frac{q(p)}{p}$ mit $p \to \infty$ gegen einen endlichen positiven Grenzwert strebt (§ 1). Wenn die positive Folge $s_1, s_2, \ldots$ einer Vergleichsfolge äquivalent ist, $\frac{s_p}{\sigma_p} \to 1$, so heißt $s_1, s_2, \ldots$ eine *gestrahlte* Folge. Z. B. sind $s_n = u^\sigma$ $(\sigma \geqq 0)$ und $s_n = u^\sigma (\lg u)^\varrho$ gestrahlte Folgen. Es ist aber von Wichtigkeit, daß in die Definition keine analytischen Ausdrücke eingehen.

Den gestrahlten Folgen treten die *gestrahlten Mittelbildungen* gegenüber. Das wesentliche Kennzeichen dieser Mittelbildungen besteht darin, daß die Zeilensummen, erstreckt bis zu einem „Strahl" u, mit wachsendem Zeilenindex gegen einen bestimmten Grenzwert streben: Wenn (a_{pq}) $(p, q = 1, 2, \ldots)$ das Koeffizientenschema der Mittelbildung ist, so soll

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{q=1}^{up} a_{pq}$$

vorhanden sein für jedes $u > 0$, *oder wenigstens für solche Werte* u, *die im Positiven dicht liegen.* — Einer gestrahlten Mittelbildung (Matrix) kommt eindeutig eine monoton wachsende „*Belegungsfunktion*" $\chi(u)$ zu, die an ihren Stetigkeitsstellen u den Grenzwert der Zeilensummen bis zu den Strahlen u darstellt. *Eine gestrahlte Matrix führt jede gestrahlte Folge* $s_1, s_2, \ldots$ *in eine gestrahlte Folge* $t_1, t_2, \ldots$ *über*; die s_p sind mit den t_p asymptotisch verknüpft durch die Beziehung

$$\frac{t_p}{s_p} \to \int_0^\infty u^\sigma \, d\chi(u) = \mu(\sigma),$$

wo σ eine Konstante ist, die aus der Folge $s_1, s_2, \ldots$ abgeleitet wird („Exponent" der gestrahlten Folge). Das Integral ist im Stieltjesschen Sinne[6]) zu verstehen und hat die Form eines Momentenintegrals.

[6]) Erklärung des Stieltjesschen Integralbegriffs bei O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, § 66.

Die Funktion $\mu(\sigma)$, die nur von der Matrix (a_{pq}) abhängt, heißt die *Momentfunktion*. Damit ist der Anschluß an die Stieltjessche Theorie[7] erreicht.

Darauf, daß die Werte u, für die der obige Grenzwert der Zeilensummen bei einer gestrahlten Matrix vorhanden ist, nur überall dicht zu liegen brauchen, gründet sich die Anwendbarkeit des Hilbertschen *Auswahlverfahrens*[8]: Aus einer beliebigen Matrix (a_{pq}) mit nichtnegativen Koeffizienten und beschränkten Zeilensummen läßt sich eine Zeilenfolge so auswählen, daß (a_{pq}) hinsichtlich dieser Zeilen die Eigenschaften einer gestrahlten Matrix hat. Das führt zur Bildung des Begriffs der *Momentmatrizen*. Zu einer Momentmatrix gehört zwar nicht mehr eindeutig eine Belegungsfunktion, wohl aber eine Momentfunktion $\mu(\sigma)$, und wenn $s_1, s_2, \ldots$ eine gestrahlte Folge ist, so strebt immer noch $\frac{t_p}{s_p} \to \mu(\sigma)$. Die Momentmittelbildungen erweisen sich als die allgemeinsten linearen Mittelbildungen mit nichtnegativen Koeffizienten und beschränkten Zeilensummen, welche jede gestrahlte Folge $s_1, s_2, \ldots$ in eine solche gestrahlte Folge überführen, daß $\frac{t_p}{s_p}$ gegen einen endlichen positiven Grenzwert strebt. Bei passender Modifikation der Definition der Momentmatrizen gilt dasselbe Resultat, wenn von den gestrahlten Folgen nur solche mit *vorgeschriebenen Exponenten* σ zugelassen werden, etwa nur mit $\sigma = 0, 1, \ldots$; darüber hinaus ohne neue Änderung der Definition, wenn zu jedem der vorgeschriebenen Exponenten nur *eine einzige* gestrahlte Folge zugelassen wird. Die eben erwähnte Beschränkung der σ ist für die Anwendungen von besonderem Interesse.

Die Entwicklungen des I. Abschnittes genügen bereits, um den bekannten Satz von Hardy-Littlewood über Potenzreihen mit positiven Koeffizienten[9] in verschärfter Form zu beweisen. Ich skizziere hier den Beweis, ohne ihn später wirklich auszuführen. Aus systematischen Gründen beweise ich dort gleich einen weitergehenden Satz (Theorem IX), bei dem die Hilfsmittel des II. Abschnitts zur Anwendung kommen. Der Hardy-Littlewoodsche Satz über Potenzreihen mit positiven Koeffizienten lautet so: *Die Potenzreihe*

$$\mathfrak{P}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

[7]) T. J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, Ann. de la Fac. des Sciences de Toulouse 8 (1894), J, S. 1–122, 9 (1895), A, S. 1–47.

[8]) D. Hilbert, Über das Dirichletsche Prinzip, Math. Ann. **59**, S. 161–186.

[9]) Hardy-Littlewood, Tauberian Theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive, Proc. of the London Math. Soc., Ser. 2, **13** (1913), S. 174–191 (S. 180). In vereinfachter Form bei E. Landau, Neuere Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1916, S. 45–52.

ei im Einheitskreise konvergent. Bei reeller Annäherung von $z \to 1$ *sei*

$$\mathfrak{P}(z) \sim \left(\frac{1}{1-z}\right)^{\sigma} L\left(\frac{1}{1-z}\right) \qquad (\sigma \geqq 0),$$

vo $L(x) = (\lg x)^{\varrho_1} (\lg \lg x)^{\varrho_2} \ldots$. *Die Koeffizienten der Potenzreihe seien nichtnegativ. Dann ist*

$$s_n = c_0 + \ldots + c_{n-1} \sim \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} n^{\sigma} L(n).$$

Ich formuliere den Satz so: *Es seien* $t_1, t_2, \ldots$ *die Abelschen Mittel einer positiven monoton wachsenden Folge* $s_1, s_2, \ldots$,

$$t_p(s_q) = t_p = \mathfrak{P}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{q-1} s_q = \sum a_{pq} s_q.$$

Wenn $t_1, t_2, \ldots$ *eine gestrahlte Folge mit dem Exponenten* σ *ist,* $\frac{t_p}{\sigma_p} \to \Gamma(\sigma+1)$, *so ist auch* $s_1, s_2, \ldots$ *eine gestrahlte Folge, und zwar strebt*

$$\frac{s_p}{\sigma_p} \to 1.$$

Die wesentlichen Schritte des Beweises sind diese: Aus $\frac{t_p(s_q)}{\sigma_p} \to \Gamma(\sigma+1)$ und der Monotonie der s folgt als genaues Seitenstück eines Hilfssatzes von Landau, den auch Hardy und Littlewood[10]) zum Ausgangspunkt nehmen,

$$\frac{t_p(q^{\nu} s_q)}{p^{\nu} \sigma_p} \to \Gamma(\sigma+\nu+1) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dafür schreibe ich

$$\frac{t_p(q^{\nu} s_q)}{p^{\nu} \sigma_p} = \frac{1}{p^{\nu}} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} \frac{s_q}{\sigma_p} q^{\nu} = \frac{1}{p^{\nu}} \sum a^*_{pq} q^{\nu} = \frac{t^*_p(q^{\nu})}{p^{\nu}} \to \Gamma(\sigma+\nu+1)$$
$$(\nu = 0, 1, \ldots),$$

so daß $a^*_{pq} = a_{pq} \frac{s_q}{\sigma_p}$. Die Matrix (a^*_{pq}) hat nichtnegative Koeffizienten und beschränkte Zeilensummen, und besitzt folgende Eigenschaft: Zu jedem Exponenten $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ gibt es eine gestrahlte Folge, nämlich $s^*_p = p^{\nu}$, welche durch (a^*_{pq}) so transformiert wird, daß $\frac{t^*_p}{s^*_p}$ gegen einen endlichen positiven Grenzwert strebt, und zwar gegen $\Gamma(\sigma+\nu+1)$. Daraus folgt zunächst, daß (a^*_{pq}) eine Momentmatrix für die Exponenten $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ mit der Momentfunktion $\mu(\nu) = \Gamma(\sigma+\nu+1)$ ist. Die *Theorie des Stieltjesschen Momentenproblems* erlaubt aber den weitergehenden Schluß, daß (a^*_{pq}) sogar eine gestrahlte Matrix ist, und zwar deswegen, *weil das zu* $\mu(\nu) = \Gamma(\sigma+\nu+1)$ *gehörige Stieltjessche Momentenproblem ein be-*

[10]) Vgl. Fußnote [9]), l. c. S. 175.

stimmtes ist. Aus der Gestrahltheit von (a^*_{pq}) und von (a_{pq}) zusammen mit der Monotonie der s folgt nun fast unmittelbar, daß $\frac{s_p}{\sigma_p} \to 1$ strebt.

Der II. Abschnitt handelt von den *sehr langsam oszillierenden, langsam oszillierenden* und *langsam abfallenden Folgen.* Diese treten an die Stelle derjenigen Folgen, die bisher durch sogenannte o- und O-Bedingungen gekennzeichnet wurden $\left(c_n = o\left(\frac{1}{n}\right),\ c_n = O\left(\frac{1}{n}\right),\ c_n = O_L\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Sie geben Anlaß zur Definition der *normal gestrahlten Matrizen.* Kombination dieser Folgen mit den gestrahlten Folgen erlaubt schließlich die Aufstellung eines „Tauberian Theorems" für Potenzreihen (Theorem XI), das an Einfachheit und Allgemeinheit nichts zu wünschen übrig läßt.

Die vorliegende Abhandlung hat sich aus einer gemeinsamen Untersuchung — die aus besonderen Gründen erst später erscheinen wird — von Toeplitz-Beuermann-R. Schmidt heraus entwickelt. Meinem Lehrer Herrn O. Toeplitz verdanke ich den Hinweis auf diesen Problemkreis, die allgemeine Einstellung in methodischer Hinsicht, und manche wertvollen Ratschläge im einzelnen, insbesondere für die Entwicklungen des I. Abschnitts. Die Wichtigkeit des Verhaltens von Matrizen auf „Strahlen" hat Herr Toeplitz zuerst erkannt (Vortrag Leipzig 1922; man vgl. ferner die erwähnte gemeinsame Untersuchung).

I. Abschnitt.

Gestrahlte Folgen, gestrahlte Mittelbildungen und Momentmittelbildungen.

§ 1.

Die gestrahlten Folgen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit solchen Zahlenfolgen $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, deren Wachstum sich durch

$$s_n = O(n^\varkappa)$$

mit geeignetem (reellem) $\varkappa$ abschätzen läßt, für die also bei geeignetem $\varkappa$ der Quotient $\frac{|s_n|}{n^\varkappa}$ unterhalb einer von n unabhängigen Schranke gelegen ist. Im Bereich dieser Zahlenfolgen pflegt man die Häufungsgrenze

$$\sigma = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lg |s_n|}{\lg n} \tag{1}$$

als *Wachstumsexponenten* oder *Wachstumsordnung* oder *Größenordnung* zu bezeichnen. In diesem ersten Abschnitt wird nur von *positiven* Folgen

die Rede sein; für die Behandlung solcher Folgen ist es nützlich, die zu (1) analoge untere Häufungsgrenze heranzuziehen[11]). Ich will die Werte

$$\bar{\sigma} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lg s_n}{\lg n} \quad \text{und} \quad \underline{\sigma} = \underline{\lim} \frac{\lg s_n}{\lg n}$$

als *obere* und *untere Größenordnung* der Folge $s_1, s_2, \ldots$ bezeichnen.

Wenn $\bar{\sigma}$ und $\underline{\sigma}$ als endliche Werte vorhanden sind, so gilt

$$\lim \frac{s_n}{n^{\bar{\sigma}+\varepsilon}} = 0, \qquad \overline{\lim} \frac{s_n}{n^{\bar{\sigma}-\varepsilon}} = +\infty,$$

$$\lim \frac{s_n}{n^{\underline{\sigma}-\varepsilon}} = +\infty, \qquad \underline{\lim} \frac{s_n}{n^{\underline{\sigma}+\varepsilon}} = 0$$

für jedes $\varepsilon > 0$, und diese Eigenschaften sind zur Definition von $\bar{\sigma}$ und $\underline{\sigma}$ ausreichend.

Wenn bei einer positiven Folge s_n die obere und untere Größenordnung übereinstimmen, $\bar{\sigma} = \underline{\sigma} = \sigma$, und wenn außerdem $\frac{s_n}{n^\sigma}$ gegen einen *endlichen* und *von Null verschiedenen* Grenzwert strebt, so ist durch Angabe von σ das Wachstum der Folge s_n in einem gewissen Sinne vollständig charakterisiert. Wenn zwar $\bar{\sigma} = \underline{\sigma} = \sigma$, aber $\frac{s_n}{n^\sigma} \to 0$ oder $\to \infty$, so kann eine genauere Einsicht in das infinitäre Verhalten der Folge wünschenswert sein. Man pflegt dann die Folge s_n zu vergleichen mit Folgen der Form $\sigma_n = n^\sigma (\lg n)^\varrho$, allgemeiner

$$\sigma_n = n^\sigma (\lg n)^{\varrho_1} (\lg\lg n)^{\varrho_2} \ldots (\lg_k n)^{\varrho_k}, \quad [12]) \tag{2}$$

mit passenden reellen $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$.

Die Folgen (2) haben ersichtlich diese Eigenschaft: Stets, wenn $q = q(p)$ mit $p = 1, 2, \ldots$ eine solche Indexfolge durchläuft, daß $\frac{q}{p}$ gegen einen endlichen positiven Grenzwert u strebt, dann strebt auch $\frac{s_q}{s_p}$ gegen einen Grenzwert, und zwar strebt

$$\frac{s_q}{s_p} \to u^\sigma.$$

Diese *innere* Eigenschaft will ich der Definition der Vergleichsfolgen und der gestrahlten Folgen zugrunde legen.

Definition 1. *Eine Folge* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ *heißt eine Vergleichsfolge, wenn für sie gilt:*

---

[11]) Man vergleiche die in der Einleitung genannte Untersuchung von Toeplitz-Beuermann-Schmidt.

[12]) Man vergleiche etwa: G. H. Hardy, Orders of Infinity, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics Nr. 12.

1) $0 < \sigma_1 \leqq \sigma_2 \leqq \dots$.

2) *Stets, wenn* $q = q(p)$ *mit* $p = 1, 2, \dots$ *eine solche Indexfolge durchläuft, daß* $\frac{q}{p}$ *gegen irgendeinen endlichen positiven Grenzwert* u *strebt,*

$$\frac{q}{p} \to u > 0,$$

dann strebt $\frac{\sigma_q}{\sigma_p}$ *gegen einen endlichen positiven Grenzwert.*

Satz 1. *Bei einer Vergleichsfolge* $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ *hängt der Grenzwert von* $\frac{\sigma_q}{\sigma_p}$ *nur ab von* u*:*

$$\frac{\sigma_q}{\sigma_p} \to \psi(u) \quad \text{mit} \quad \frac{q}{p} \to u > 0.$$

Die für $u > 0$ *definierte Funktion* $\psi(u)$ *hat die Form*

$$\psi(u) = u^{\sigma},$$

wo $\sigma \geqq 0$ *und unabhängig von* u *ist.*

Der erste Teil der Behauptung ist selbstverständlich. Der zweite Teil wird bewiesen sein, wenn erkannt ist, daß $\psi(u)$ der Funktionalgleichung

$$\psi(uv) = \psi(u)\psi(v)$$

genügt und *stetig* ist. Denn $\sigma \geqq 0$ folgt dann unmittelbar aus der Monotonie der Folge $\sigma_1, \sigma_2, \dots$.

Nach Definition der Vergleichsfolgen ist immer $\psi(u) > 0$. Daher ist, wenn $u > 0$ und $v > 0$,

$$\psi(uv) = \lim_{p \to \infty} \frac{\sigma_{uvp}}{\sigma_{vp}} \cdot \frac{\sigma_{vp}}{\sigma_p} = \lim_{p \to \infty} \frac{\sigma_{uvp}}{\sigma_{vp}} \cdot \lim_{p \to \infty} \frac{\sigma_{vp}}{\sigma_p} = \psi(u)\psi(v).$$ [13])

Aus

$$\psi(u \pm \varepsilon) = \psi\left(1 \pm \frac{\varepsilon}{u}\right)\psi(u)$$

liest man ab, daß $\psi(u)$ entweder überall stetig oder überall unstetig ist. Wegen der Monotonie der Folge $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ ist nun aber $\psi(u)$ eine monoton wachsende[14]) Funktion, und hat als solche nur höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Also ist $\psi(u)$ stetig.

---

[13]) Wenn eine nicht natürliche Zahl als Index auftritt, soll darunter die größte in ihr enthaltene ganze Zahl verstanden werden; ferner $s_0 = s_1$.

[14]) „Monoton wachsend" hier und später immer im Sinne von „nirgends abnehmend".

Definition 2. *Eine positive Folge $s_1, s_2, \ldots$ heißt gestrahlt*[15]*), wenn sie einer Vergleichsfolge $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ äquivalent ist, d. h.*

$$\frac{s_p}{\sigma_p} \to 1 .$$

Die Bezeichnungsweise wird durch die Struktur der Matrix $\left(\frac{s_q}{s_p}\right)$ — p der Zeilen-, q der Spaltenindex — nahegelegt; diese Matrix spielt in den Beweisen der Theoreme I, Ia, II, III eine Rolle. „Das Element a_{pq} der Matrix (a_{pq}) liegt auf dem Strahl u" möge nämlich ein Ausdruck für die Tatsache sein, daß der Quotient aus Spalten- und Zeilenindex dieses Elementes den Wert u hat. Jede Folge von Elementen der Matrix $\left(\frac{s_q}{s_p}\right)$, die asymptotisch auf einem Strahl u liegen, d. h. $\frac{q}{p} \to u$, ist dann konvergent.

Die Exponenten zweier äquivalenten Vergleichsfolgen stimmen offenbar überein. Man kann daher auch jeder gestrahlten Folge *eindeutig* einen *Exponenten* σ zuordnen, nämlich den gemeinsamen Exponenten aller derjenigen Vergleichsfolgen, welche der gestrahlten Folge äquivalent sind. Darüber gilt der

Satz 2. *Die obere und untere Größenordnung einer gestrahlten Folge stimmen überein, und beide sind gleich dem Exponenten der Folge:*

$$\bar{\sigma} = \underline{\sigma} = \sigma .$$

Es genügt, den Satz für Vergleichsfolgen zu beweisen. Sei also $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ eine Vergleichsfolge, und vorläufig ihr Exponent $\sigma > 0$. Nach Definition 1 ist bei festem $\varepsilon > 0$, wenn p groß genug gewählt wird und $\sigma - \varepsilon > 0$ ist,

$$2^{\sigma-\varepsilon} \leqq \frac{\sigma_{2p}}{\sigma_p} \leqq 2^{\sigma+\varepsilon},$$

$$2^{\sigma-\varepsilon} \leqq \frac{\sigma_{4p}}{\sigma_{2p}} \leqq 2^{\sigma+\varepsilon},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$2^{\sigma-\varepsilon} \leqq \frac{\sigma_{2^\nu p}}{\sigma_{2^{\nu-1}p}} \leqq 2^{\sigma+\varepsilon} .$$

[15]) Der Begriff der gestrahlten Folgen läßt sich noch etwas erweitern, indem man unter gewissen Einschränkungen die Monotonieforderung 1), Def. 1, unterdrückt, und zwar so, daß alle späteren Sätze Gültigkeit behalten. Folgen wie

$$s_p = 2 + \sin \lg\lg p ,$$

die im obigen Sinne nicht gestrahlt sind, lassen sich einbeziehen. Hier ist allerdings $\underline{\sigma} = 0$, und es sei ohne Beweis erwähnt, daß eine positive Folge $s_1, s_2, \ldots$ mit $\underline{\sigma} > 0$ schon dann gestrahlt ist, wenn sie der Bedingung 2), Definition 1, genügt.

Daraus folgt für jedes natürliche ν

$$(2^{\sigma-\varepsilon})^{\nu} \leqq \frac{\sigma_{2^{\nu}p}}{\sigma_p} \leqq (2^{\sigma+\varepsilon})^{\nu}.$$

p soll jetzt festgehalten werden. Sei q ein beliebiger Index $> 2p$, und werde die natürliche Zahl ν so gewählt, daß

$$2^{\nu} p < q \leqq 2^{\nu+1} p.$$

Dann ist

$$\frac{\sigma_{2^{\nu}p}}{\sigma_p} \leqq \frac{\sigma_q}{\sigma_p} \leqq \frac{\sigma_{2^{\nu+1}p}}{\sigma_p},$$

also

$$(2^{\sigma-\varepsilon})^{\nu} \leqq \frac{\sigma_q}{\sigma_p} \leqq (2^{\sigma+\varepsilon})^{\nu+1}$$

oder

$$(2^{\nu})^{\sigma-\varepsilon}\sigma_p \leqq \sigma_q \leqq (2^{\nu+1})^{\sigma+\varepsilon}\sigma_p$$

oder

$$\frac{\sigma_p}{p^{\sigma-\varepsilon}}\left(\frac{2^{\nu}p}{q}\right)^{\sigma-\varepsilon} q^{\sigma-\varepsilon} \leqq \sigma_q \leqq \frac{\sigma_p}{p^{\sigma+\varepsilon}}\left(\frac{2^{\nu+1}p}{q}\right)^{\sigma+\varepsilon} q^{\sigma+\varepsilon}$$

oder

$$\frac{\sigma_p}{p^{\sigma-\varepsilon}} \cdot \frac{1}{2^{\sigma-\varepsilon}} q^{\sigma-\varepsilon} \leqq \sigma_q \leqq \frac{\sigma_p}{p^{\sigma+\varepsilon}} 2^{\sigma+\varepsilon} q^{\sigma+\varepsilon},$$

so daß

$$A q^{\sigma-\varepsilon} \leqq \sigma_q \leqq B q^{\sigma+\varepsilon},$$

A und B unabhängig von q. Das ist die Behauptung.

Im Falle $\sigma = 0$ sind nur die Abschätzungen von $\frac{\sigma_q}{\sigma_p}$ und σ_q nach oben richtig, und es folgt nur $\bar{\sigma} \leqq 0$. Das reicht aber völlig aus, wenn man beachtet, daß wegen der Monotonie der σ_q jedenfalls $\underline{\sigma} \geqq 0$ ist.

Im allgemeinen ist es jedoch nicht möglich, das Wachstum einer gestrahlten Folge — über Satz 2 hinausgehend — schärfer zu charakterisieren durch Angabe gewisser reeller Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$, die analog wie σ als

$$\varrho_1 = \lim \frac{\lg \frac{s_n}{n^{\sigma}}}{\lg\lg n}, \quad \varrho_2 = \lim \frac{\lg \frac{s_n}{n^{\sigma}(\lg n)^{\varrho_1}}}{\lg\lg\lg n}, \quad \ldots$$

zu definieren wären. Anders ausgedrückt: Unter den gestrahlten Folgen sind wesentlich allgemeinere enthalten als diejenigen von der Form

$$s_n = C_n n^{\sigma} (\lg n)^{\varrho_1} \ldots (\lg_k n)^{\varrho_k} \qquad (C_n \to C \neq 0)$$

Setzt man z. B.

$$s_n = C_n n^{\sigma} = (2 + \sin \lg\lg n) n^{\sigma} \qquad (\sigma > 0)$$

so sind die C_n beschränkt, aber nicht konvergent, während die Folge s_n gestrahlt ist. Ferner überzeugt man sich ziemlich leicht, daß

$$s_n = n^{\sigma} (\lg n)^{\sin \lg\lg n} \qquad (\sigma > 0$$

eine gestrahlte Folge ist, während hier offenbar der Exponent ϱ_1 nicht vorhanden ist.

In Analogie zu den gestrahlten Folgen ist ohne weiteres klar, was unter einer *gestrahlten Funktion* zu verstehen ist. Es sei festgetellt, daß die sog. L-Funktionen[16]) (logarithmico-exponential functions), soweit sie von endlicher Größenordnung sind, unter den gestrahlten Funktionen enthalten sind. Die gestrahlten Funktionen gehen auch hierüber wesentlich hinaus; z. B. wird jede ins Unendliche wachsende L-Funktion, aber nicht jede gestrahlte Funktion, durch einen genügend oft iterierten Logarithmus unterschritten.

Übrigens sind die soeben benutzten gestrahlten Funktionen

$$(2+\sin \lg\lg x)\, x^{\sigma} \quad \text{und} \quad x^{\sigma}(\lg x)^{\sin \lg\lg x} \qquad (\sigma > 0)$$

auch keine L-Funktionen.

§ 2.

Die gestrahlten Mittelbildungen.

Unter den häufig untersuchten linearen Mittelbildungen (Limitierungsverfahren) haben mehrere die Eigenschaft, jede spezielle Folge

$$s_1 = 1^{\sigma}, \quad s_2 = 2^{\sigma}, \ldots \qquad (\sigma \geqq 0)$$

in eine solche Folge $t_1, t_2, \ldots$ überzuführen, daß

$$\lim_{p \to \infty} \frac{t_p}{s_p}$$

vorhanden ist. Zu diesen Mittelbildungen gehören die Hölderschen, Cesàroschen, Eulerschen, überhaupt alle Hausdorffschen[17]), ferner die Verfahren von Abel und Borel. Es sei jedoch gleich hier bemerkt, daß bei einer Verfeinerung des Begriffs der Gestrahltheit, die ich an einer anderen Stelle ausführen werde, die Verfahren von Euler und Borel in in einem ganz anderen Lichte erscheinen.

Es ist auch nicht schwer einzusehen — und wird durch das Theorem I allgemein bewiesen —, daß die eben angeführten Mittelbildungen jede gestrahlte Folge in eine gestrahlte Folge überführen. Das ihnen Gemeinsame, und zwar dasjenige, was die genannte Eigenschaft im wesentlichen bedingt, ist folgendes: Sei (a_{pq}) die Matrix der Koeffizienten; $p, q = 1, 2, \ldots$.

---

[16]) Hardy, Orders of Infinity l. c. (Fußnote 12).

[17]) F. Hausdorff, Summationsmethoden und Momentfolgen I und II, Math. Zeitschr. 9 (1921), S. 74–109, S. 280–299.

Wählt man $u > 0$ beliebig und bildet in der p-ten Zeile die Summe der up ersten Koeffizienten, so ist

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{q=1}^{up} a_{pq} = \varphi(u)$$

vorhanden. Z. B. erhält man bei den ersten arithmetischen Mitteln

$$(a_{pq}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

den Grenzwert

$$\varphi(u) = \begin{cases} u \text{ für } u \leqq 1 \\ 1 \text{ für } u \geqq 1, \end{cases}$$

bei der Mittelbildung

$$(a_{pq}) = \left(\frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{q-1}\right),$$

die in engem Zusammenhang mit dem Abelschen Limitierungsverfahren steht (vgl. § 13), den Grenzwert

$$\varphi(u) = 1 - e^{-u}.$$

Man bemerke jedoch, daß die Mittelbildung

$$(a_{pq}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

ebenfalls jede gestrahlte Folge in eine ebensolche überführt, daß aber $\varphi(1)$ nicht existiert. Es wird also nötig sein, Vorkommnisse dieser Art mit zu umfassen, wenn die *weitesten* Bedingungen aufgesucht werden sollen, unter denen die Transformierten aller gestrahlten Folgen ebenfalls gestrahlt sind. Die Bedingung 2) der Definition 3 bringt das Wesen der gestrahlten Mittelbildungen zum Ausdruck, während die Bedingung 1) lediglich zur Sicherstellung der Konvergenz gewisser Reihen und Folgen dient.

Definition 3. *Eine Mittelbildung (Matrix) mit nichtnegativen Koeffizienten* a_{pq} $(p, q = 1, 2, \dots)$ *heißt gestrahlt, wenn sie die Bedingungen erfüllt:*

1) $$\lim_{\Lambda \to \infty} \Lambda^{\varkappa} \sum_{q=\Lambda p+1}^{(\Lambda+1)p} a_{pq} = 0$$

für jedes reelle $\varkappa$, *und bei festem* $\varkappa$ *gleichmäßig für* $p = 1, 2, \dots$.

2) *Es gibt eine überall dichte Menge von Werten* $u > 0$,[18]) *für welche*

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{q=1}^{up} a_{pq} = \varphi(u)$$

vorhanden ist und nicht immer einen und denselben Wert hat.

Jeder gestrahlten Matrix (a_{pq}) kommt *eindeutig* eine Funktion $\varphi(u)$ zu, wenn gesetzt wird

$$\varphi(u) = \lim_{p \to \infty} \sum_{q=1}^{up}{}' a_{pq}$$

für *alle* $u > 0$, für die der Grenzwert rechts existiert. Die Menge der Werte u, in denen $\varphi(u)$ definiert ist, ist überall dicht; weil die a_{pq} nichtnegativ sind, ist $\varphi(u)$ monoton wachsend, hat also für jedes $u > 0$ einen links- und einen rechtsseitigen Limes $\varphi(u-0)$ und $\varphi(u+0)$. Daher ist es sinnvoll zu definieren:

Definition 4. *Die Funktion* $\chi(u)$, *welche durch die Forderungen*

1) $\qquad \chi(0) = 0,$

2) $\qquad \chi(u) = \frac{1}{2}\{\varphi(u-0) + \varphi(u+0)\}$

für alle $u \geqq 0$ *erklärt wird, heißt die Belegungsfunktion der gestrahlten Matrix* (a_{pq}).

Die Belegungsfunktion $\chi(u)$ ist monoton wachsend und nicht für alle $u > 0$ konstant (wegen 2), Def. 3). Ferner ist aus 1), Def. 3 leicht zu entnehmen — und wird bei Theorem I mitbewiesen —, daß $\chi(u)$ beschränkt ist. Für jedes $u > 0$ ist

$$(3) \qquad \chi(u-0) = \varphi(u-0) \leqq \overline{\lim_{p \to \infty}} \sum_{q=1}^{up} a_{pq} \leqq \varphi(u+0) = \chi(u+0).$$

Aus (3) folgt unmittelbar der häufig anzuwendende

Satz 3. *An jeder Stetigkeitsstelle* u *von* $\chi(u)$ *ist*

$$\lim \sum_{q=1}^{up} a_{pq} = \chi(u).$$

Weil eine monotone Funktion nur höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen haben kann, so folgt nebenbei: *Wenn* (a_{pq}) *eine gestrahlte Matrix ist, so ist*

$$\lim \sum_{q=1}^{up} a_{pq}$$

vorhanden für alle $u > 0$, *mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Werten* u.

[18]) D. h. wenn a und b irgend zwei verschiedene positive Zahlen sind, gibt es ein geeignetes u zwischen a und b.

Ich füge noch die Bemerkung hinzu:

Wenn die Belegungsfunktion $\chi(u)$ einer gestrahlten Matrix (a_{pq}) stetig ist (einschließlich der Stelle $u=0$), so ist

$$\lim \sum_{q=1}^{up} a_{pq} = \chi(u)$$

gleichmäßig für alle $u > 0$.

Von diesem Satze mache ich keine Anwendung, so daß der sehr einfache Beweis unterdrückt werden kann.

Eine gestrahlte Mittelbildung braucht nicht konvergenzerhaltend zu sein, d. h. die Konvergenz einer Folge s_n zieht nicht notwendig die Konvergenz der transformierten Folge t_n nach sich. Vielmehr ist eine gestrahlte Mittelbildung nur dann, aber auch stets dann konvergenzerhaltend, wenn sie der Bedingung

$$\lim_{p\to\infty} a_{pq} \quad \text{vorhanden} \quad (q = 1, 2, \ldots)$$

genügt[19]). Diese Bedingung ist von selbst erfüllt bei den sogleich zu erklärenden *nullstetig* gestrahlten Mittelbildungen.

Definition 5. *Eine Matrix heißt nullstetig gestrahlt, wenn sie gestrahlt ist, und ihre Belegungsfunktion an der Stelle $u = 0$ stetig ist:*

$$\chi(0+0) = \chi(0) = 0.$$

Die nullstetig gestrahlten Mittelbildungen sind in der Tat konvergenzerhaltend, und zwar ist

$$\lim_{p\to\infty} a_{pq} = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots);$$

sie sind reine Mittelbildungen in der Bezeichnungsweise von Herrn Hausdorff. Eine reine gestrahlte Mittelbildung ist aber nicht notwendig nullstetig gestrahlt.

§ 3.

Die Haupteigenschaft der gestrahlten Mittelbildungen.

Theorem I. *Eine gestrahlte Mittelbildung (a_{pq}) führt jede gestrahlte Folge $s_1, s_2, \ldots$ mit einem Exponenten $\sigma > 0$ in eine gestrahlte Folge $t_1, t_2, \ldots$ über, und zwar strebt $\frac{t_p}{s_p}$ gegen einen endlichen und von Null verschiedenen Grenzwert. Dieser Grenzwert hängt nur ab von σ und der Belegungsfunktion; genauer*

$$\frac{t_p}{s_p} \to \mu(\sigma) = \int_0^\infty u^\sigma d\chi(u).$$

[19]) Vgl. Toeplitz l. c., Hausdorff l. c. (Fußnoten 5 und 17).

Wenn (a_{pq}) nullstetig gestrahlt ist, so gilt die Behauptung allgemein für jede gestrahlte Folge $s_1, s_2, \ldots$.

Der Beweis erfordert den

Hilfssatz 1. *Sei $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ eine Vergleichsfolge mit dem Exponenten σ, und $\varkappa > \sigma$. Werde gesetzt*

$$\sigma_p = C_p p^\varkappa \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Dann gibt es eine Konstante K, so daß

$$\frac{C_q}{C_p} \leqq K \quad \text{für alle} \quad q \geqq p \quad \text{und} \quad p = 1, 2, \ldots .$$

Nach Def. 1 und Satz 1 ist

$$\lim \frac{\sigma_{2p}}{\sigma_p} = \lim \frac{C_{2p}(2p)^\varkappa}{C_p p^\varkappa} = 2^\sigma,$$

so daß

$$\lim \frac{C_{2p}}{C_p} = 2^{\sigma-\varkappa} < 1.$$

Für alle $p \geqq p_0$ ist daher

$$\frac{C_{2p}}{C_p} \leqq 1,$$

und weiter

$$\frac{C_{2^\nu p}}{C_p} = \frac{C_{2^\nu p}}{C_{2^{\nu-1}p}} \cdot \frac{C_{2^{\nu-1}p}}{C_{2^{\nu-2}p}} \cdots \frac{C_{2p}}{C_p} \leqq 1 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots). \tag{4}$$

Sei $q \geqq p \geqq p_0$ beliebig, und werde ν so gewählt, daß

$$2^\nu p \leqq q < 2^{\nu+1} p.$$

Dann wird nach (4) und 1), Def. 1,

$$\frac{C_q}{C_p} = \frac{C_q}{C_{2^\nu p}} \frac{C_{2^\nu p}}{C_p} \leqq \frac{C_q}{C_{2^\nu p}} = \frac{\sigma_q}{\sigma_{2^\nu p}} \left(\frac{2^\nu p}{q}\right)^\varkappa \leqq \frac{\sigma_{2^{\nu+1}p}}{\sigma_{2^\nu p}},$$

woraus die Beschränktheit von $\frac{C_q}{C_p}$ für alle $q \geqq p \geqq p_0$ abzulesen ist. Wegen $C_q \to 0$ sind auch die Quotienten $\frac{C_q}{C_p}$ für $p = 1, \ldots, p_0$ und alle q beschränkt, so daß in der Tat

$$\frac{C_q}{C_p} \leqq K$$

für alle Indexpaare p, q mit $q \geqq p$.

Beweis des Theorems I. Ich will das Behauptete zunächst mit der Einschränkung beweisen, daß ich die Folgen $s_1, s_2, \ldots$ als *Vergleichsfolgen* voraussetze. Sei also $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ eine Vergleichsfolge mit dem Exponenten $\sigma\,(\geqq 0)$, und $\tau_1, \tau_2, \ldots$ die Folge ihrer Mittel:

$$\tau_p = \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} \sigma_q,$$

deren Existenz sich sogleich herausstellen wird. Es sei $\Lambda > 0$ eine Stetigkeitsstelle der Belegungsfunktion $\chi(u)$ von (a_{pq}), und es bedeute

$$\tau_p^* = \sum_{q=1}^{\Lambda p} a_{pq}\,\sigma_q .$$

Eine Teilung T des Intervalls $(0, \Lambda)$,

$$0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = \Lambda ,$$

werde so ausgeführt, daß alle Differenzen $u_i - u_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ unterhalb einer vorgegebenen Zahl $\delta > 0$ liegen, und daß außerdem $u_1, \ldots, u_n$ Stetigkeitsstellen von $\chi(u)$ sind. Da die Stetigkeitsstellen einer monotonen Funktion überall dicht liegen, ist eine solche Wahl der u_i stets möglich. Es ist

$$\frac{\tau_p^*}{\sigma_p} \begin{cases} \leqq \dfrac{\sigma_{u_1 p}}{\sigma_p} \displaystyle\sum_{q=1}^{u_1 p} a_{pq} + \frac{\sigma_{u_2 p}}{\sigma_p} \sum_{q=u_1 p+1}^{u_2 p} a_{pq} + \ldots + \frac{\sigma_{u_n p}}{\sigma_p} \sum_{q=u_{n-1} p+1}^{u_n p} a_{pq} = O_T(p), \\ \geqq \dfrac{\sigma_{u_1 p}}{\sigma_p} \displaystyle\sum_{q=u_1 p+1}^{u_2 p} a_{pq} + \ldots + \frac{\sigma_{u_{n-1} p}}{\sigma_p} \sum_{q=u_{n-1} p+1}^{u_n p} a_{pq} = U_T(p). \end{cases}$$

Nach den Sätzen 1 und 3 ist

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\, O_T(p) \leqq u_1^\sigma \{\chi(u_1) - \chi(u_0)\} + u_2^\sigma \{\chi(u_2) - \chi(u_1)\} + \ldots + u_n^\sigma \{\chi(u_n) - \chi(u_{n-1})\} = O_T ,$$

$$\underline{\lim_{p\to\infty}}\, U_T(p) \geqq u_1^\sigma \{\chi(u_2) - \chi(u_1)\} + \ldots + u_{n-1}^\sigma \{\chi(u_n) - \chi(u_{n-1})\} = U_T .$$

Für $\sigma > 0$ unterscheiden sich O_T und U_T beliebig wenig von dem Stieltjesschen Integral

$$\int_0^\Lambda u^\sigma d\chi(u),$$

wenn nur δ genügend klein gewählt wird. Dasselbe trifft auch noch für $\sigma = 0$ zu, wenn $\chi(0+0) = \chi(0)$ ist; das gehört aber in diesem Falle zur Voraussetzung. In beiden Fällen ist demnach

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\tau_p^*}{\sigma_p} = \int_0^\Lambda u^\sigma d\chi(u). \tag{5}$$

Es handelt sich jetzt darum, von (5) den Übergang zu

$$\lim \frac{\tau_p}{\sigma_p} = \int_0^\infty u^\sigma d\chi(u) = \mu(\sigma) > 0 \tag{6}$$

zu vollziehen. (6) ist gleichbedeutend mit den drei Behauptungen

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\,\sigma_q \quad \text{konvergent}, \tag{7}$$

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \int_0^\Lambda u^\sigma d\chi(u) \quad \text{endlich und positiv}, \tag{8}$$

9) $$\lim_{\Lambda\to\infty}\lim_{p\to\infty}\frac{\tau_p^*}{\sigma_p}=\lim_{p\to\infty}\frac{\tau_p}{\sigma_p}.$$

s bedeute

$$R_\Lambda(p)=\sum_{q=\Lambda p+1}^{\infty}a_{pq}\frac{\sigma_q}{\sigma_p}.$$

ie Richtigkeit von (7), (8) und (9) — mit Ausnahme von $\mu(\sigma)>0$ — ird gesichert sein, wenn folgendes erkannt ist:

10) $$\lim_{\Lambda\to\infty}R_\Lambda(p)=0 \quad \textit{gleichmäßig} \text{ für } p=1,2,\ldots.$$

uf Grund von Hilfssatz 1 und 1), Def. 3, folgt nun (10) sehr einfach. ie Stetigkeitsstellen $\Lambda_0,\Lambda_1,\ldots$ von $\chi(u)$ seien so gewählt, daß

$$\Lambda=\Lambda_0<\Lambda+\frac{1}{2}<\Lambda_1<\Lambda+\frac{2}{2}<\Lambda_2<\Lambda+\frac{3}{2}<\ldots.$$

s werde wieder gesetzt

$$\sigma_p=C_p\,p^\varkappa \qquad (\varkappa>\sigma).$$

ann ist

$$R_\Lambda(p)=\sum_{q=\Lambda p+1}^{\infty}a_{pq}\frac{C_q}{C_p}\left(\frac{q}{p}\right)^\varkappa\leqq K\sum_{q=\Lambda p+1}^{\infty}a_{pq}\left(\frac{q}{p}\right)^\varkappa,$$

$$\sum_{=\Lambda p+1}^{\infty}a_{pq}\left(\frac{q}{p}\right)^\varkappa=\sum_{q=\Lambda_0 p+1}^{\Lambda_1 p}+\sum_{q=\Lambda_1 p+1}^{\Lambda_2 p}+\cdots$$

$$\leqq\Lambda_1^\varkappa\sum_{q=\Lambda_0 p+1}^{\Lambda_1 p}a_{pq}+\Lambda_2^\varkappa\sum_{q=\Lambda_1 p+1}^{\Lambda_2 p}a_{pq}+\cdots$$

$$\leqq\left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0}\right)^\varkappa\frac{1}{\Lambda_0^2}\Lambda_0^{\varkappa+2}\sum_{q=\Lambda_0 p+1}^{(\Lambda_0+1)p}a_{pq}+\left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}\right)^\varkappa\frac{1}{\Lambda_1^2}\Lambda_1^{\varkappa+2}\sum_{q=\Lambda_1 p+1}^{(\Lambda_1+1)p}a_{pq}+\cdots$$

$$\leqq\left(\frac{\Lambda+1}{\Lambda}\right)^\varkappa\left(\frac{1}{\Lambda_0^2}+\frac{1}{\Lambda_1^2}+\cdots\right)M$$

$$\leqq\left(\frac{\Lambda+1}{\Lambda}\right)^\varkappa\left(\frac{1}{\Lambda^2}+\frac{1}{\left(\Lambda+\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\Lambda+\frac{2}{2}\right)^2}+\cdots\right)M;$$

ier bedeutet M eine Konstante, die nach 1), Def. 3, von p und Λ unbhängig ist. Damit ist (10) in Evidenz gesetzt.

Daß

$$\mu(\sigma)=\int_0^\infty u^\sigma\,d\chi(u)>0$$

st, folgt so: Nach 2), Def. 3, gibt es zwei Werte $u_1>0$ und $u_2>u_1$, ür welche $\varphi(u_2)>\varphi(u_1)$. Wählt man

$$0<v_1<u_1, \qquad v_2>u_2,$$

so ist

$$\chi(v_1) \leqq \varphi(u_1), \qquad \chi(v_2) \geqq \varphi(u_2)$$

und

$$\mu(\sigma) = \int_0^{\infty} u^\sigma d\chi(u) \geqq \int_{v_1}^{v_2} u^\sigma d\chi(u) \geqq v_1^\sigma \{\varphi(u_2) - \varphi(u_1)\} > 0.$$

Mit σ_p ist also auch $\sigma_p' = \mu(\sigma)\sigma_p$ eine Vergleichsfolge, und nach (6) strebt

$$\frac{\tau_p}{\sigma_p'} \to 1,$$

d. h. τ_p ist eine gestrahlte Folge. Damit ist das Theorem I für Vergleichsfolgen bewiesen.

Es sei jetzt $s_1, s_2, \ldots$ eine gestrahlte Folge, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ eine solche Vergleichsfolge, daß $\frac{s_p}{\sigma_p} \to 1$. M sei eine Schranke für $\frac{s_q}{\sigma_q}$. Nach Wahl von $\varepsilon > 0$ werde m so bestimmt, daß $1 - \varepsilon \leqq \frac{s_q}{\sigma_q} \leqq 1 + \varepsilon$ für alle $q > m$. Dann ist

$$(1-\varepsilon)\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\frac{\sigma_q}{\sigma_p} - \frac{\sigma_m}{\sigma_p}\sum_{q=1}^{m} a_{pq} \leqq \frac{t_p}{\sigma_p} \leqq M\frac{\sigma_m}{\sigma_p}\sum_{q=1}^{m} a_{pq} + (1+\varepsilon)\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\frac{\sigma_q}{\sigma_p}.$$

Bei $\sigma > 0$ strebt $\sigma_p \to \infty$, und es folgt

$$\frac{t_p}{\sigma_p} \to \int_0^{\infty} u^\sigma d\chi(u). \tag{11}$$

Für $\sigma = 0$ ist (a_{pq}) *nullstetig* gestrahlt vorauszusetzen. In diesem Falle ist

$$\lim_{p\to\infty} a_{pq} = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots),$$

und damit

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{q=1}^{m} a_{pq} = 0.$$

Weil außerdem $\frac{\sigma_m}{\sigma_p}$ bei festem m beschränkt ist, so ist (11) auch in diesem Falle richtig, daher in beiden Fällen

$$\frac{t_p}{s_p} = \frac{t_p}{\sigma_p} \cdot \frac{\sigma_p}{s_p} \to \mu(\sigma),$$

was behauptet war.

Den Beweis des Theorems I habe ich in einer Form geführt, die einen weitergehenden Schluß zu ziehen gestattet. Tatsächlich wurde nämlich bewiesen

Theorem Ia. *Wenn (a_{pq}) eine (nullstetig) gestrahlte Matrix mit der Belegungsfunktion $\chi(u)$ ist, $s_1, s_2, \ldots$ eine gestrahlte Folge mit einem Exponenten $\sigma > 0$ $(\sigma \geqq 0)$, so ist auch die Matrix*

$$(\bar{a}_{pq}) = \left(a_{pq}\frac{s_q}{s_v}\right)$$

ne (nullstetig) gestrahlte Matrix. Die Belegungsfunktion $\bar{\chi}(u)$ von $_{pq}$) ist an ihren Stetigkeitsstellen gegeben durch

$$\bar{\chi}(u) = \int_0^u v^\sigma \, d\chi(v).$$

§ 4.

Momentmittelbildungen. Ausdehnung des Theorems I auf Momentmittelbildungen.

In diesem Paragraphen sollen die Voraussetzungen des Theorems I erweitert werden, daß seine Umkehrung in dem durch Theorem III, § 5, ngegebenen Sinne möglich ist. Ich gehe dabei von der Bemerkung aus, aß sich vermöge des Hilbertschen Auswahlverfahrens[20]) unter geringen oraussetzungen aus jeder Matrix (a_{pq}) eine Teilfolge von Zeilenindizes hervorheben läßt, daß (a_{pq}) die Eigenschaften einer gestrahlten Matrix ıfweist, wenn man nur diese Zeilenindizes in Betracht zieht.

Es sei (a_{pq}) eine Matrix mit nichtnegativen Koeffizienten, welche so eschaffen ist, daß

1. die Bedingung 1), Def. 3, erfüllt ist,
2. die Zeilensummen unterhalb einer von p unabhängigen Schranke liegen:

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} \leqq M \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

edenfalls ist dann

12) $$\overline{\lim_{p \to \infty}} \sum_{q=1}^{u_p} a_{pq} \leqq M \quad \text{für alle } u.$$

Irgendeine abzählbare und (im Positiven) überall dichte Menge von Verten $u > 0$ möge abgezählt vorliegen:

$$u_0, u_1, u_2, \ldots.$$

Man wähle eine Folge von wachsenden Zeilenindizes

13) $$p_0, p_1, p_2, \cdots$$

o, daß

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{q=1}^{u_0 p_i} a_{p_i, q} = \varphi(u_0)$$

orhanden ist. Wegen (12) ist das möglich. Aus der Indexfolge (13) reife man eine Teilfolge

14) $$p_0', p_1', p_2', \cdots$$

[20]) Hilbert, l. c. S. 171–172 (Fußnote 8).

so heraus, daß

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{q=1}^{u_1 p_i'} a_{p_i', q} = \varphi(u_1)$$

vorhanden ist; aus (14) weiter eine Teilfolge

$$p_0'', p_1'', p_2'' \cdots$$

so, daß

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{q=1}^{u_2 p_i''} a_{p_i'', q} = \varphi(u_2)$$

vorhanden ist; allgemein aus

$$p_0^{(\nu-1)}, p_1^{(\nu-1)}, p_2^{(\nu-1)}, \ldots$$

eine Teilfolge

$$p_0^{(\nu)}, p_1^{(\nu)}, p_2^{(\nu)}, \ldots \tag{15}$$

so, daß

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{q=1}^{u_\nu p_i^{(\nu)}} a_{p_i^{(\nu)}, q} = \varphi(u_\nu)$$

vorhanden ist.

Die Folge der Zeilenindizes

$$p_0, p_1', p_2'', \ldots, p_\nu^{(\nu)}, \ldots$$

ist vom Gliede $p_\nu^{(\nu)}$ an eine Teilfolge der Folge (15); es ist daher

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{q=1}^{u p_\nu^{(\nu)}} a_{p_\nu^{(\nu)}, q} = \varphi(u)$$

vorhanden für $u = u_0, u_1, u_2, \ldots$.

Erinnert man sich jetzt an die Definition der gestrahlten Matrizen so kann man das soeben gewonnene Resultat so formulieren: *Aus jeder Matrix* (a_{pq}) *mit nichtnegativen Koeffizienten, welche den obigen Bedingungen* 1) *und* 2) *genügt, läßt sich eine Folge von Zeilen so hervorheben daß* (a_{pq}) *„hinsichtlich dieser Zeilen" gestrahlt ist.*

Die Belegungsfunktion von (a_{pq}) „hinsichtlich der Zeilen $p_0, p_1', p_2'', \ldots$" ist natürlich aus $\varphi(u)$ ebenso zu bilden, wie es früher, Def. 4, geschehen ist. Es darf aber nicht übersehen werden, daß $\varphi(u) \equiv$ konst. ausfallen kann, daß also $\chi(u)$ sehr wohl für alle $u > 0$ konstant sein kann, und damit

$$\int_0^\infty u^\sigma \, d\chi(u) = 0 \quad \text{für alle } \sigma > 0.$$

Vorläufig läßt sich aus dem Beweisgang des Theorems I aber doch so viel schließen: *Wenn* $s_1, s_2, \ldots$ *eine gestrahlte Folge mit einem Exponenten* $\sigma > 0$ *ist, so ist*

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{t_{p_\nu^{(\nu)}}}{s_{p_\nu^{(\nu)}}} = \int_0^\infty u^\sigma \, d\chi(u).$$

Definition 6. *Als die zur Matrix* (a_{pq}) *gehörige Menge* X *soll Menge derjenigen Belegungsfunktionen* $\chi(u)$ *bezeichnet werden, die h aus* (a_{pq}) *durch das Auswahlverfahren gewinnen lassen.*

Man erhält bereits *alle* Elemente von X, wenn man eine *einzige* nge von Werten $u_0, u_1, u_2, \ldots$ zugrunde legt. Zum Beweise werde ben $u_0, u_1, u_2, \ldots$ noch eine zweite solche Menge $v_0, v_1, v_2, \ldots$ ins ge gefaßt. Sei $\bar{\chi}$ irgendeine Belegungsfunktion, auf die das Auswahl-fahren unter Benutzung der Stellen $v_0, v_1, v_2, \ldots$ führt. Die bei der ldung von $\bar{\chi}$ ausgewählten Zeilenindizes seien

6) $$\bar{p}_0, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots.$$

f (16) werde das Auswahlverfahren erneut angewendet, aber jetzt unter nutzung der Stellen $u_0, u_1, u_2, \ldots$. Die resultierende Teilfolge von 6) sei

$$p_0, p_1, p_2, \ldots,$$

t der Belegungsfunktion χ. Es ist dann

$$\lim_{\nu \to \infty} \sum_{q=1}^{up_\nu} a_{p_\nu, q} \text{ vorhanden für } u = \begin{cases} u_0, u_1, u_2, \ldots \\ v_0, v_1, v_2, \ldots, \end{cases}$$

raus folgt

$$\bar{\chi}(u-0) = \chi(u-0), \qquad \bar{\chi}(u+0) = \chi(u+0),$$

d damit

$$\bar{\chi}(u) \equiv \chi(u).$$

Zu den Bedingungen 1) und 2), welche die Menge X zu bilden ge-atten und die Konvergenz der Integrale

$$\int_0^\infty u^\sigma \, d\chi(u)$$

r jedes χ aus X und jedes $\sigma \geqq 0$ sichern, füge ich jetzt eine dritte nzu und gelange damit zu dem Begriff der Momentmittelbildungen.

Definition 7. *Eine Matrix* (a_{pq}) *mit nichtnegativen Koeffizienten ißt eine Momentmatrix, wenn sie die Bedingungen erfüllt:*

1) $$\lim_{\Lambda \to \infty} \Lambda^\varkappa \sum_{q=\Lambda p+1}^{(\Lambda+1)p} a_{pq} = 0$$

für jedes reelle $\varkappa$, *und bei festem* $\varkappa$ *gleichmäßig für* $p = 1, 2, \ldots$;

2) $$\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} \leqq M \qquad (p = 1, 2, \ldots);$$

3) *Wenn* $\chi_1(u)$ *und* $\chi_2(u)$ *irgend zwei Elemente der zu* (a_{pq}) *gehörigen Menge* X *sind, so ist*

$$\int_0^\infty u^\sigma d\chi_1(u) = \int_0^\infty u^\sigma d\chi_2(u) = \mu(\sigma) > 0$$

für jedes $\sigma > 0$.

Die für $\sigma > 0$ *definierte Funktion* $\mu(\sigma)$ *heißt die Momentfunktion der Matrix* (a_{pq}).

Definition 8. *Eine Matrix* (a_{pq}) *heißt eine nullstetige Momentmatrix, wenn sie eine Momentmatrix ist, und wenn außerdem*

$$\lim_{u \to 0} \overline{\lim_{p \to \infty}} \sum_{q=1}^{up} a_{pq} = 0 \text{ [21]}.$$

Die Momentfunktion $\mu(\sigma)$ einer Momentmatrix (a_{pq}) ist nur für $\sigma > 0$ erklärt, und tatsächlich kann es vorkommen, daß die Integrale

$$\int_0^\infty u^0 d\chi(u) = \int_0^\infty d\chi(u)$$

nicht für alle χ aus X einen und denselben Wert haben. Beispiel:

$$(a_{pq}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Hier treten zwei Belegungsfunktionen auf, eine hinsichtlich der geraden und eine hinsichtlich der ungeraden Zeilenindizes:

$$\chi_1(u) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad u < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{„} \quad u = 1 \\ 1 & \text{„} \quad u > 1 \end{cases} \qquad \chi_2(u) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad u = 0 \\ 1 & \text{„} \quad 0 < u < 1 \\ \frac{3}{2} & \text{„} \quad u = 1 \\ 2 & \text{„} \quad u > 1 \end{cases}.$$

$$\mu(\sigma) = 1 \quad \text{für} \quad \sigma > 0,$$

aber

$$\int_0^\infty d\chi_1(u) = 1, \qquad \int_0^\infty d\chi_2(u) = 2.$$

[21]) Oder — was genau dasselbe besagt — wenn alle Elemente von X an der Stelle $u = 0$ stetig sind.

Wenn aber (a_{pq}) eine *nullstetige* Momentmatrix ist, so ist $\mu(0)$ als emeinsamer Wert der Integrale

$$\int_0^\infty d\chi(u) \qquad (\chi \text{ aus } X)$$

orhanden, und zwar

$$\mu(0) = \mu(0+0) > 0.$$

um Beweise genügt es zu zeigen, daß

17) $$\int_0^\infty d\chi(u) = \lim_{\sigma \to 0} \int_0^\infty u^\sigma \, d\chi(u) \qquad (\chi \text{ aus } X).$$

enn nach Definition der Momentmatrizen stimmen die Grenzwerte rechts ir alle χ aus X miteinander überein, und jedenfalls ist

$$\int_0^\infty d\chi(u) = \lim_{u \to \infty} \chi(u) \doteq \chi(\infty)$$

ndlich, weil $\chi(u) \leqq M$, und von Null verschieden, weil sonst $\mu(\sigma)$ iden- isch verschwinden würde.

Um (17) zu beweisen, werde angesetzt

$$\left| \int_0^\infty u^\sigma \, d\chi(u) - \int_0^\infty d\chi(u) \right| = \left| \int_0^\infty (u^\sigma - 1) \, d\chi(u) \right| = \left| \int_0^\delta + \int_\delta^\Lambda + \int_\Lambda^\infty \right|$$

$$\leqq \chi(\delta) + \chi(\infty) \operatorname{Max}(1 - \delta^\sigma, \Lambda^\sigma - 1) + \int_\Lambda^\infty u^\sigma \, d\chi(u)$$

$$(0 < \delta < 1, \ \Lambda > 1, \ \sigma > 0).$$

Weil (a_{pq}) eine *nullstetige* Momentmatrix sein soll, ist $\chi(0+0) = 0$ vgl. Fußnote 21). Bei festem $\varepsilon > 0$ läßt sich daher δ so wählen, daß

$$\chi(\delta) \leqq \varepsilon.$$

Durch genügend große Wahl von Λ wird auch

$$\int_\Lambda^\infty u^\sigma \, d\chi(u) \leqq \varepsilon$$

unabhängig von σ, wenn nur σ etwa $\leqq 1$ gehalten wird. Nachdem δ und Λ ixiert sind, möge σ gegen Null streben:

$$1 - \delta^\sigma \to 0, \qquad \Lambda^\sigma - 1 \to 0,$$

leswegen

$$\overline{\lim_{\sigma \to 0}} \left| \int_0^\infty u^\sigma \, d\chi(u) - \int_0^\infty d\chi(u) \right| \leqq 2\varepsilon,$$

$$\lim_{\sigma \to 0} \left(\int_0^\infty u^\sigma \, d\chi(u) - \int_0^\infty d\chi(u) \right) = 0.$$

Nach diesen Vorbereitungen lasse ich die angekündigte Erweiterung des Theorems I folgen.

Theorem II. *Eine Momentmittelbildung* (a_{pq}) *führt jede gestrahlte Folge* $s_1, s_2, \ldots$ *mit einem Exponenten* $\sigma > 0$ *in eine gestrahlte Folge* $t_1, t_2, \ldots$ *über, und zwar strebt* $\frac{t_p}{s_p}$ *gegen einen endlichen und von Null verschiedenen Grenzwert. Dieser Grenzwert hängt nur ab von* σ *und der Momentfunktion; genauer*

$$\frac{t_p}{s_p} \to \mu(\sigma).$$

Wenn (a_{pq}) *eine nullstetige Momentmittelbildung ist, so gilt die Behauptung allgemein für jede gestrahlte Folge.*

Wäre im Gegenteil $s_1, s_2, \ldots$ eine gestrahlte Folge mit dem Exponenten σ_0 $(\geqq 0)$ derart, daß $\frac{t_p}{s_p}$ nicht gegen $\mu(\sigma_0)$ konvergiert, so könnte man eine Teilfolge von Zeilenindizes

$$p_0, p_1, \ldots, p_\nu, \ldots \tag{18}$$

bestimmen, für welche $\frac{t_{p_\nu}}{s_{p_\nu}}$ gegen einen endlichen oder unendlichen, aber von $\mu(\sigma_0)$ verschiedenen Grenzwert λ strebt. Auf die Folge (18) angewendet würde das Auswahlverfahren eine solche Belegungsfunktion $\chi(u)$ liefern, daß nach Theorem I

$$\int_0^\infty u^{\sigma_0}\, d\chi(u) = \lambda \neq \mu(\sigma_0)$$

wäre, entgegen der Voraussetzung. — Die Fälle $\sigma_0 > 0$ und $\sigma_0 = 0$ brauchte ich dabei nicht zu trennen.

Für Momentmatrizen hat das Theorem Ia ein unmittelbar zu erkennendes Analogon, doch kommt es mir darauf nicht an.

§ 5.

Umkehrung des Theorems II.

Es handelt sich in diesem Paragraphen um den Nachweis, daß die Momentmittelbildungen die *allgemeinsten* linearen Mittelbildungen mit nichtnegativen Koeffizienten sind, welche die in den Theoremen I und II behaupteten Eigenschaften haben. Allerdings muß dabei eine — nicht schwerwiegende — Einschränkung gemacht werden, nämlich die, daß die Zeilensummen der in Betracht zu ziehenden Mittelbildungen von vornherein als *beschränkt* vorausgesetzt werden. Tatsächlich ist diese Einschränkung

tig für die Umkehrung des Teils von Theorem II, der sich auf gestrahlte lgen mit einem Exponenten $\sigma > 0$ bezieht: Die Matrix

$$(a_{pq}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ \lg 2 & 1 & 0 & \\ \lg 3 & 0 & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

hrt jede gestrahlte Folge mit $\sigma > 0$ in eine gestrahlte Folge über, und ar strebt

$$\frac{t_p}{s_p} \to 1,$$

$_{pq})$ ist aber offenbar keine Momentmatrix.

Mit dieser Einschränkung wird die gewünschte Umkehrung des Theoms II nun geleistet durch das

Theorem III. *Wenn eine Matrix (a_{pq}) mit nichtnegativen Koeffienten und beschränkten Zeilensummen jede gestrahlte Folge $s_1, s_2, \ldots$ it einem Exponenten $\sigma > 0$ so transformiert, daß $\frac{t_p}{s_p}$ gegen einen endchen positiven und nur von σ abhängenden Grenzwert strebt, dann ist $_{pq})$ eine Momentmatrix.*

Wenn die Matrix (a_{pq}) diese Eigenschaft auch noch gegenüber jeder strahlten Folge mit dem Exponenten $\sigma = 0$ besitzt, dann ist sie eine ullstetige Momentmatrix.

Auch hier werde ich mehr beweisen, nämlich

Theorem IIIa. *Die Matrix (a_{pq}) habe nichtnegative Koeffizienten d beschränkte Zeilensummen. Wenn es zu jedem Exponenten $\sigma > 0$ ne gestrahlte Folge $s_1, s_2, \ldots$ mit diesem Exponenten gibt, welche durch $_{pq})$ so transformiert wird, daß $\frac{t_p}{s_p}$ gegen einen endlichen positiven Grenzert strebt, dann ist (a_{pq}) eine Momentmatrix.*

Theorem IIIb. *Die Matrix (a_{pq}) sei eine Momentmatrix. Wenn $_{pq})$ jede gestrahlte Folge $s_1, s_2, \ldots$ mit dem Exponenten $\sigma = 0$ so transrmiert, daß $\frac{t_p}{s_p}$ immer gegen einen und denselben Grenzwert strebt, nn ist (a_{pq}) eine nullstetige Momentmatrix.*

Die Theoreme IIIa und IIIb zusammen besagen offenbar mehr als heorem III. Für die Anwendungen ist allein das Theorem IIIa von edeutung; IIIb beweise ich nur der Vollständigkeit halber.

Beweis des Theorems IIIa. Zunächst muß

$$9) \qquad \lim_{\Lambda \to \infty} \Lambda^{\varkappa} \sum_{q=\Lambda p+1}^{(\Lambda+1)p} a_{pq} = 0$$

für jedes reelle $\varkappa$ uud jedes $p = 1, 2, \ldots$ erfüllt sein. Gesetzt, für ein gewisses $\varkappa$ und ein gewisses p wäre das nicht der Fall. Sei $s_1, s_2, \ldots$ eine gestrahlte Folge mit $\sigma > \varkappa$, für welche die Voraussetzung des Theorems gilt. Nach Satz 2 und Definition der unteren Größenordnung gibt es eine Konstante $B > 0$, so daß

$$s_q \geqq B q^{\varkappa} \qquad (q = 1, 2, \ldots).$$

Daher ist

$$\sum_{q=\Lambda p+1}^{(\Lambda+1)p} a_{pq} s_q \geqq B(\Lambda p)^{\varkappa} \sum_{q=\Lambda p+1}^{(\Lambda+1)p} a_{pq} = B p^{\varkappa} \cdot \Lambda^{\varkappa} \sum_{q=\Lambda p+1}^{(\Lambda+1)p} a_{pq},$$

und

$$t_p = \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} s_q$$

hat keinen Sinn.

Wäre aber der Limes (19) nicht *gleichmäßig* für $p = 1, 2, \ldots$ vorhanden, so würde es positive Zahlen $\varkappa$ und δ, eine positive Folge

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_\nu, \ldots \to \infty$$

und eine Indexfolge $p_1, p_2, \ldots, p_\nu, \ldots$ geben derart, daß

$$\Lambda_\nu^{\varkappa} \sum_{q=\Lambda_\nu p_\nu+1}^{(\Lambda_\nu+1)p} a_{p_\nu q} \geqq \delta \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Es sei $s_1, s_2, \ldots$ eine gestrahlte Folge[22]) mit $\sigma > \varkappa + 1$. Zunächst ist

$$\frac{t_{p_\nu}}{s_{p_\nu}} \geqq \sum_{q=\Lambda_\nu p_\nu+1}^{(\Lambda_\nu+1)p_\nu} a_{p_\nu q} \frac{s_q}{s_{p_\nu}}. \tag{20}$$

Nun gilt — der Beweis verläuft genau parallel dem des Hilfssatzes 1 — der

Hilfssatz 2. *Sei $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ eine Vergleichsfolge mit dem Exponenten σ, und $\varkappa < \sigma$. Werde gesetzt*

$$\sigma_p = D_p p^{\varkappa} \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Dann gibt es eine Konstante $k > 0$, so daß

$$\frac{D_q}{D_p} \geqq k \quad \textit{für alle} \quad q \geqq p \quad \textit{und} \quad p = 1, 2, \ldots.$$

Dieser Hilfssatz überträgt sich ohne weiteres auf gestrahlte Folgen, und erlaubt von (20) zu schließen auf

$$\frac{t_{p_\nu}}{s_{p_\nu}} \geqq k \Lambda_\nu^{\varkappa+1} \sum_{q=\Lambda_\nu p_\nu+1}^{(\Lambda_\nu+1)p_\nu} a_{p_\nu q} \geqq k \delta \Lambda_\nu \to \infty,$$

---

[22]) Wenn man nur das Theorem III beweisen will, kann man $s_1 = 1^{\sigma}$, $s_2 = 2^{\sigma}$, ... wählen, und der Hilfssatz 2 ist überflüssig.

ährend es doch wenigstens *eine* gestrahlte Folge mit dem Exponenten σ eben soll, für welche $\frac{t_p}{s_p}$ gegen einen endlichen Grenzwert strebt. — amit ist bewiesen, daß die Matrix (a_{pq}) der Bedingung 1), Def. 7, genügt.

Es ist fast selbstverständlich, daß auch die Bedingung 3), Def. 7, füllt sein muß. Denn würden durch das Auswahlverfahren zwei Begungsfunktionen $\chi_1(u)$ und $\chi_2(u)$ resultieren, für welche bei einem gewissen $\sigma > 0$

$$\int_0^\infty u^\sigma \, d\chi_1(u) \neq \int_0^\infty u^\sigma \, d\chi_2(u)$$

äre, dann würde es eine Teilfolge von Zeilenindizes $p_1, p_2, \ldots$ geben, daß für *jede* gestrahlte Folge mit dem Exponenten σ

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{t_{p_\nu}}{s_{p_\nu}} = \int_0^\infty u^\sigma \, d\chi_1(u),$$

nd ebenfalls eine Teilfolge von Zeilenindizes $q_1, q_2, \ldots$, so daß

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{t_{q_\nu}}{s_{q_\nu}} = \int_0^\infty u^\sigma \, d\chi_2(u),$$

nd $\frac{t_p}{s_p}$ wäre demnach für *keine* gestrahlte Folge mit dem Exponenten σ onvergent. — Natürlich muß auch $\mu(\sigma) > 0$ sein, weil sonst $\frac{t_p}{s_p} \to \mu(\sigma) = 0$.

Beweis des Theorems IIIb. Die Folge $s_p = 1$ ist eine gestrahlte Vergleichs-)folge. Hierfür ist

$$\frac{t_p}{s_p} = \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}.$$

Die Zeilensummen der Momentmatrix (a_{pq}) streben daher gegen einen ositiven Grenzwert S. — Der Behauptung entgegen werde angenommen, $a_{pq})$ sei nicht nullstetig. Im Anschluß an Definition 8 wurde bemerkt, daß

$$\int_0^\infty d\chi(u) - \lim_{\sigma \to 0} \int_0^\infty u^\sigma \, d\chi(u) = 0$$

st, wenn $\chi(u)$ an der Stelle $u = 0$ stetig ist. Allgemein ist

21) $$\int_0^\infty d\chi(u) - \lim_{\sigma \to 0} \int_0^\infty u^\sigma \, d\chi(u) = \chi(0+0),$$

as man ebenso leicht beweist. In dem vorliegenden Fall ist $\chi(0+0) > 0$ nd

$$\int_0^\infty d\chi(u) = S.$$

Das Theorem IIIb wird demnach bewiesen sein, wenn sich eine gestrahlte Folge mit $\sigma = 0$ angeben läßt, so daß

$$\frac{t_p}{s_p} \to \mu(0+0) = \lim_{\sigma \to 0} \int_0^\infty u^\sigma \, d\chi(u).$$

Das kann so geschehen. Man gehe von der Folge $s_1 = 1,\ s_2 = 2, \ldots$ aus. Durch passende Wahl der Indizes p_1 und $q_1 \geqq p_1$ kann man nach Theorem III erreichen, daß

$$\left| \frac{t_{p_1}}{s_{p_1}} - \mu(1) \right| \leqq 1$$

ist, auch dann noch, wenn nachträglich diejenigen s mit größerem Index als q_1 durch beliebige *kleinere* (positive) Werte ersetzt werden. Eine erste Verkleinerung vom (q_1+1)-ten Gliede an werde dadurch ausgeführt, daß man zunächst C_1 aus

$$s_{q_1} = C_1 q_1^{\frac{1}{2}}$$

bestimmt, und setzt

$$s_{q_1+1} = C_1 (q_1+1)^{\frac{1}{2}}, \qquad s_{q_1+2} = C_1 (q_1+2)^{\frac{1}{2}}, \ \ldots .$$

Durch passende Wahl von p_2 und $q_2 \geqq p_2$, $q_2 > q_1$ kann man weiter erreichen, daß

$$\left| \frac{t_{p_2}}{s_{p_2}} - \mu\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leqq \frac{1}{2}$$

ist, auch dann noch, wenn nachträglich diejenigen s mit größerem Index als q_2 durch beliebige kleinere (positive) Werte ersetzt werden. Eine zweite Verkleinerung vom (q_2+1)-ten Gliede an werde dadurch ausgeführt, daß man zunächst C_2 aus

$$(C_1 q_2^{\frac{1}{2}} =)\, s_{q_2} = C_2 q_2^{\frac{1}{3}}$$

bestimmt, und setzt

$$s_{q_2+1} = C_2 (q_2+1)^{\frac{1}{3}}, \qquad s_{q_2+2} = C_2 (q_2+2)^{\frac{1}{3}}, \ \ldots .$$

Auf diese Weise entsteht die Folge

$$s_1 = 1, \qquad s_2 = 2, \qquad \ldots, \qquad s_{q_1} = q_1 = C_1 q_1^{\frac{1}{2}},$$

$$s_{q_1+1} = C_1 (q_1+1)^{\frac{1}{2}}, \qquad s_{q_1+2} = C_1 (q_1+2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \ldots, \qquad s_{q_2} = C_1 q_2^{\frac{1}{2}} = C_2 q_2^{\frac{1}{3}},$$

$$s_{q_2+1} = C_2 (q_2+1)^{\frac{1}{3}}, \ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \

und es gibt zu jedem ν ein p_ν, so daß

$$\left| \frac{t_{p_\nu}}{s_{p_\nu}} - \mu\left(\frac{1}{\nu}\right) \right| \leqq \frac{1}{\nu},$$

d. h.

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{t_{p_\nu}}{s_{p_\nu}} = \mu(0+0).$$

Die Folge $s_1, s_2, \ldots$ ist monoton wachsend; es fehlt also nur noch der Nachweis, daß sie der Bedingung 2), Def. 1, genügt und den Exponenten $\sigma = 0$ hat. — Jedem Index $p \geqq q_1$ wird durch $q_\nu \leqq p < q_{\nu+1}$ ein bestimmtes ν zugeordnet. Für $q \geqq p$ ist

$$1 \leqq \frac{s_q}{s_p} \leqq \frac{C_\nu q^{\frac{1}{\nu+1}}}{C_\nu p^{\frac{1}{\nu+1}}} = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{\nu+1}},$$

$$1 \geqq \frac{s_p}{s_q} \geqq \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{\nu+1}},$$

daraus

$$\frac{s_q}{s_p} \to 1 = u^0, \quad \text{sobald} \quad \frac{q}{p} \to u > 0 \quad \text{mit} \quad p \to \infty.$$

§ 6.

Verhältnis der gestrahlten Mittelbildungen und der Momentmittelbildungen zueinander.

Jede gestrahlte Matrix ist eine Momentmatrix. Bisher blieb jedoch die Frage unberührt, ob oder unter welchen Umständen eine Momentmatrix eine gestrahlte Matrix ist. In dieser Form muß ich die Frage offen lassen. Statt dessen will ich die Momentmatrizen unter einem etwas allgemeineren Gesichtspunkt betrachten, und diese Frage dann für den Fall stellen, der für die Anwendungen allein von Bedeutung ist. Es wird sich zeigen, daß sich die Antwort unmittelbar aus der Theorie des Stieltjesschen Momentenproblems ergibt. Vorbereitend beweise ich den

Satz 4. *Wenn die Menge X einer Momentmatrix (a_{pq}) aus einem einzigen Element $\chi(u)$ besteht, dann ist (a_{pq}) eine gestrahlte Matrix.*

Es braucht nur gezeigt werden, daß

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{q=1}^{up} a_{pq} = \chi(u)$$

ist in allen Stetigkeitsstellen u von $\chi(u)$. Wäre das nicht der Fall, so

würde es eine gewisse Stetigkeitsstelle u von $\chi(u)$ und eine positive Zahl δ geben, so daß entweder

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \sum_{q=1}^{up} a_{pq} \geqq \chi(u) + \delta$$

oder

$$\underline{\lim_{p\to\infty}} \sum_{q=1}^{up} a_{pq} \leqq \chi(u) - \delta.$$

Möge etwa das erstere zutreffen, und sei $p_1, p_2, \ldots$ eine solche Teilfolge von Zeilenindizes, daß

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{q=1}^{up_\nu} a_{p_\nu q} \geqq \chi(u) + \delta.$$

Auf die Indexfolge $p_1, p_2, \ldots$ angewendet, liefert das Auswahlverfahren eine Belegungsfunktion $\bar{\chi}(u)$, für welche gilt

$$\bar{\chi}(u+0) \geqq \chi(u) + \delta,$$

während doch $\bar{\chi}(u)$ mit $\chi(u)$ identisch sein sollte, so daß

$$\bar{\chi}(u+0) = \chi(u+0) = \chi(u).$$

Sei S eine beliebige Menge von Werten $\sigma \geqq 0$, von der ich der Einfachheit halber[23]) voraussetzen will, daß sie nicht beschränkt ist, und $\mu(\sigma)$ eine eindeutige Funktion in S. Als das zur Funktion $\mu(\sigma) > 0$ gehörige Stieltjessche Momentenproblem will ich die Frage nach der Lösbarkeit von

$$\mu(\sigma) = \int_0^\infty u^\sigma \, d\chi(u) \qquad (\sigma \text{ durchläuft } S) \tag{22}$$

durch eine monoton wachsende Funktion $\chi(u)$ bezeichnen[24]). Insbesondere heißt das zu $\mu(\sigma)$ gehörige Momentenproblem ein *bestimmtes*, wenn es eine und *nur* eine — durch $\chi(0) = 0$ und für $u > 0$ durch die Forderung des arithmetischen Mittels $\chi(u) = \frac{1}{2}\{\chi(u-0) + \chi(u+0)\}$ präzisierte — Lösungsfunktion $\chi(u)$ gibt. Wenn (22) lösbar ist, heißt $\mu(\sigma)$ eine Momentfunktion in S, $\chi(u)$ eine Belegungsfunktion von $\mu(\sigma)$. Schließlich nenne ich eine Matrix (a_{pq}) eine Momentmatrix in S, wenn sie den Bedingungen der Definition 7 genügt, falls σ auf S beschränkt wird. Die

[23]) Sonst gelten die über „Momentmatrizen in S" zu behauptenden Sätze nur mit Einschränkungen, und sind außerdem uninteressant.

[24]) Gewöhnlich läßt man als Lösungen des Momentenproblems nur Funktionen $\chi(u)$ *mit unendlich vielen Wachstumsstellen* zu, um der Existenz des dem Problem zugeordneten Kettenbruches sicher zu sein. Es liegt hier natürlich keine Veranlassung vor, auf die Theorie der Kettenbrüche Rücksicht zu nehmen; doch werden die im Stieltjesschen Falle gültigen Lösbarkeits- und Bestimmtheitskriterien entsprechend zu modifizieren sein.

heoreme II, III, IIIa und IIIb bleiben ohne weiteres richtig, wenn an in ihnen Voraussetzung und Behauptung mit dem Zusatz „σ aus S" ersieht. Wenn $\sigma = 0$ nicht in S vorkommt, sind einige Behauptungen gegenstandslos; andernfalls sind die Fälle $\sigma = 0$ und $\sigma > 0$ (aus S) wie über zu trennen.

Satz 5. *Es sei S eine nicht beschränkte Menge von Werten $\sigma \geqq 0$, $\mu(\sigma)$ eine eindeutige Funktion in S und durchweg positiv. Dann und nur dann, wenn das zu $\mu(\sigma)$ gehörige Momentenproblem lösbar ist, gibt es eine Momentmatrix in S mit der Momentfunktion $\mu(\sigma)$. Wenn das zu $\mu(\sigma)$ gehörige Momentenproblem ein bestimmtes ist, ist jede Momentmatrix in S mit der Momentfunktion $\mu(\sigma)$ notwendig eine gestrahlte Matrix. Andernfalls gibt es nichtgestrahlte Momentmatrizen in S mit der Momentfunktion $\mu(\sigma)$.*

Wenn das Momentenproblem nicht lösbar ist, ist die Behauptung offenbar richtig.

Das Momentenproblem sei lösbar, $\chi(u)$ eine Belegungsfunktion von $\mu(\sigma)$. Die Matrix mit den Koeffizienten

$$a_{pq} = \chi\left(\frac{q}{p}\right) - \chi\left(\frac{q-1}{p}\right)$$

ist dann eine (gestrahlte) Momentmatrix in S mit der Momentfunktion $\mu(\sigma)$.

Es liege der Bestimmtheitsfall des Momentenproblems vor, $\mu(\sigma)$ habe die *einzige* Belegungsfunktion $\chi(u)$. Die Menge X irgendeiner Momentmatrix in S mit der Momentfunktion $\mu(\sigma)$ kann nur das eine Element $\chi(u)$ enthalten, so daß nach Satz 4 die Matrix gestrahlt ist.

Endlich möge das zu $\mu(\sigma)$ gehörige Momentenproblem zwei *verschiedene* Lösungen $\chi_1(u)$ und $\chi_2(u)$ besitzen. Dann ist die Matrix, deren Elemente

$$a_{pq} = \begin{cases} \chi_1\left(\frac{q}{p}\right) - \chi_1\left(\frac{q-1}{p}\right) & \text{für ungerades } p, \\ \chi_2\left(\frac{q}{p}\right) - \chi_2\left(\frac{q-1}{p}\right) & \text{für gerades } p \end{cases}$$

sind, eine Momentmatrix in S mit der Momentfunktion $\mu(\sigma)$, ist aber keine gestrahlte Matrix.

Besonders wichtig ist der Fall

$$S = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Hier liegt das Momentenproblem in der Stieltjesschen Fassung[25]) vor, mit der einen Abweichung, daß auch Lösungsfunktionen mit nur endlich

[25]) Stieltjes, l. c. S. 48 (J.) (Fußnote 7).

vielen Wachstumstellen zugelassen sind. Der Stieltjesschen Theorie ist leicht zu entnehmen, oder direkt durch Anwendung des Weierstraßschen Approximationssatzes zu beweisen (Satz von M. Lerch[26]), daß das Momentenproblem bei *endlichem* Intervall, wenn es überhaupt lösbar ist, stets ein *bestimmtes* ist: Aus

$$\mu(\sigma) = \int_0^v u^\sigma d\chi_1(u) = \int_0^v u^\sigma d\chi_2(u) \quad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$$

folgt

$$\chi_1(u) \equiv \chi_2(u).$$

Das besagt insbesondere (nach Satz 5):

Wenn die Koeffizienten einer Momentmatrix (a_{pq}) *in* $S = \{0, 1, \ldots\}$ *rechts von der Diagonale, oder rechts von einem gewisssen Strahl* $\frac{q}{p} = v$ *alle verschwinden, dann ist* (a_{pq}) *notwendig eine gestrahlte Matrix.*

Dagegen ist es eines der ersten Ergebnisse der Stieltjesschen Theorie, daß das Momentenproblem bei *unendlichem* Intervall $(0, \infty)$ *unbestimmt* sein kann. In diesem Zusammenhange ist es von größtem und ausschließlichem Interesse, über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu verfügen, unter denen der Bestimmtheitsfall des Momentenproblems vorliegt. Diese Bedingungen werden in der Stieltjesschen Theorie entwickelt, sie erscheinen dort jedoch ausgedrückt in den Koeffizienten des dem Problem zugeordneten Kettenbruches. Die Stieltjesschen Bedingungen hat Herr H. Hamburger auf die Momente $\mu(0), \mu(1), \ldots$ selber übertragen, als beiläufiges Ergebnis seiner allgemeineren Untersuchungen[27]). — Vorweg sei bemerkt: Bedeuten C_n und D_n die Hankelschen Determinanten

$$C_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-2} \end{vmatrix}, \qquad D_n = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} \end{vmatrix},$$

wo zur Abkürzung $\mu(n) = \mu_n$, so ist das Momentenproblem nur (und stets) dann durch eine mononton wachsende Funktion $\chi(u)$ mit *unendlich vielen* Wachstumstellen lösbar, wenn

$$C_n > 0, \quad D_n > 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

[26]) M. Lerch, Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel, Acta Mathematica **27**, S. 339–357 (S. 347).

[27]) H. Hamburger, Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems I–III, Math. Ann. **81**, S. 235–319; **82**, S. 120–164, S. 168–187 (1920–1921). Vgl. bes. Teil III.

n. a. W., wenn die unendlichen quadratischen Formen

$$F(x) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty} \mu_{\alpha+\beta} x_\alpha x_\beta \quad \text{und} \quad G(x) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty} \mu_{\alpha+\beta+1} x_\alpha x_\beta$$

positiv definit sind. Wenn eine der Determinanten C_n oder D_n verschwindet, kommen als Lösungsfunktionen $\chi(u)$ nur solche mit höchstens endlich vielen Wachstumstellen in Betracht. Dann ist aber das Momentenproblem ein bestimmtes. Andernfalls ist die Hamburgersche Fassung[27]) des Stieltjesschen Bestimmtheitskriteriums anwendbar: *Das zu den Momenten $\mu_0, \mu_1, \ldots$ gehörige Stieltjessche Momentenproblem ist dann und nur dann ein bestimmtes, wenn wenigstens eine der Formen $F(x)$ und $G(x)$ uneigentlich definit ist.* — Unter einer uneigentlich definiten quadratischen Form ist eine solche zu verstehen, deren Minima der Abschnittsformen auf der Ebene $x_0 = 1$ gegen Null streben. Diese Minima der Abschnittsformen

$$F_n(x) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{n} \mu_{\alpha+\beta} x_\alpha x_\beta \quad \text{und} \quad G_n(x) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{n} \mu_{\alpha+\beta+1} x_\alpha x_\beta$$

werden dargestellt durch die Determinantenquotienten

$$M_n = \frac{C_n}{C_n'}, \qquad N_n = \frac{D_n}{D_n'},$$

wo

$$C_n' = \begin{vmatrix} \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \mu_3 & \mu_4 & \cdots & \mu_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-2} \end{vmatrix}, \qquad D_n' = \begin{vmatrix} \mu_3 & \mu_4 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \mu_4 & \mu_5 & \cdots & \mu_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{n+1} & \mu_{n+2} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}.$$

Alle C_n' und D_n' sind > 0, wenn es alle C_n und D_n sind. Die Größen M_n und N_n können mit wachsendem n nur abnehmen (unmittelbare Folge ihrer Bedeutung als Minima). Zusammenfassend kann man daher formulieren:

Bestimmtheitskriterium A. *Das zur Momentfunktion $\mu(0) = \mu_0 > 0$, $\mu(1) = \mu_1 > 0, \ldots$ gehörige Stieltjessche Momentenproblem ist dann und nur dann ein bestimmtes, wenn wenigstens eine der Determinanten C_n und D_n verschwindet, oder wenn*

$$\lim \frac{C_n D_n}{C_n' D_n'} = 0.$$

Die Stieltjessche Theorie reicht nicht aus, um die prinzipielle Schwierigkeit gewisser Mittelungsumkehrsätze (z. B. der Eulerschen und Borelschen Verfahren) zu überwinden. Das leistet erst die von Herrn Hamburger zuerst und abschließend behandelte Theorie des Momenten-

problems bei *beiderseits* unendlichem Intervall[28]). Bei gegebenen reellen $\mu_0, \mu_1, \ldots$ wird dort die Frage gestellt nach der Lösbarkeit von

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} u^n d\chi(u) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

durch eine monoton wachsende Funktion $\chi(u)$, und sodann nach der Eindeutigkeit der Lösungen. Triviale Vieldeutigkeiten sind durch geeignete Festsetzungen auszuschließen, etwa wieder durch $\chi(0) = 0$ und $\chi(u) = \frac{1}{2}\{\chi(u-0) + \chi(u+0)\}$. Ich setze das von Herrn Hamburger gewonnene Bestimmtheitskriterium (mit der entsprechenden Modifikation wie oben) hierher.

Bestimmtheitskriterium B. *Das zur Momentfunktion $\mu_0(0) = \mu_0$, $\mu(1) = \mu_1, \ldots$ gehörige Hamburgersche Momentenproblem ist dann und nur dann ein bestimmtes, wenn wenigstens eine der Determinanten C_n verschwindet, oder wenn*

$$\lim \frac{C_n}{C_n''} = 0.$$

Dabei bedeutet

$$C_n'' = \begin{vmatrix} \mu_4 & \mu_5 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \mu_5 & \mu_6 & \cdots & \mu_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{n+1} & \mu_{n+2} & \cdots & \mu_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

§ 7.

Komposition.

Aus den Theoremen II und III läßt sich sofort schließen auf den

Satz 6. *Wenn $A = (a_{pq})$ und $B = (b_{pq})$ Momentmatrizen in S sind, so ist auch*

$$AB = \left(\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha} b_{\alpha q}\right)$$

eine Momentmatrix in S. Die Momentfunktion $\mu_{AB}(\sigma)$ von AB setzt sich aus den Momentfunktionen $\mu_A(\sigma)$ und $\mu_B(\sigma)$ von A und B multiplikativ zusammen:

$$\mu_{AB}(\sigma) = \mu_A(\sigma)\mu_B(\sigma). \tag{23}$$

Wenn $\sigma = 0$ in S vorkommt, ist natürlich von A und B Nullstetigkeit zu fordern und von AB zu behaupten.

Zunächst sind die Zeilensummen von AB beschränkt, denn

$$\sum_{q=1}^{\infty} c_{pq} = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha} b_{\alpha q} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha} \sum_{q=1}^{\infty} b_{\alpha q} \leqq M_B \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha} \leqq M_A M_B.$$

[28]) H. Hamburger, l. c. (Fußnote 27).

Wenn B die Folge $s_1, s_2, \ldots$ in die Folge $t_1, t_2, \ldots$, A die Folge $t_1, t_2, \ldots$ in die Folge $T_1, T_2, \ldots$ überführt, so führt AB die Folge $s_1, s_2, \ldots$ in die Folge $T_1, T_2, \ldots$ über. Wenn $s_1, s_2, \ldots$ gestrahlt ist mit einem Exponenten σ aus S, so ist (zweimalige Anwendung des Theorems II) auch $T_1, T_2, \ldots$ gestrahlt, und zwar strebt

$$\frac{t_p}{s_p} \to \mu_B(\sigma), \qquad \frac{T_p}{t_p} \to \mu_A(\sigma),$$

daher

$$\frac{T_p}{s_p} = \frac{T_p}{t_p} \cdot \frac{t_p}{s_p} \to \mu_A(\sigma)\,\mu_B(\sigma) > 0,$$

woraus nach Theorem III folgt, daß AB eine Momentmatrix in S ist, für deren Momentfunktion $\mu_{AB}(\sigma)$ die Gültigkeit von (23) schon mitbewiesen ist.

Nicht so unmittelbar einzusehen ist das

Theorem IV. *Wenn A und B gestrahlte Matrizen mit den Belegungsfunktionen χ_A und χ_B sind, A außerdem nullstetig, dann ist auch AB eine gestrahlte Matrix. Die Belegungsfunktion χ_{AB} von AB ist gegeben durch*

$$\chi_{AB}(u) = \int_0^\infty \chi_B\left(\frac{u}{v}\right) d\chi_A(v), \tag{24}$$

gültig für alle $u > 0$ mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen u. Wenn A und B nullstetig gestrahlt sind, dann ist auch AB nullstetig gestrahlt.

Dem Beweise dieses Theorems schicke ich einen allgemeinen Satz über Stieltjessche Integrale voraus.

Satz 7. *Das Stieltjessche Integral*

$$\int_a^b \psi(x)\, d\chi(x)$$

zweier Funktionen $\psi(x)$ und $\chi(x)$, welche im Intervall $a \leqq x \leqq b$ von beschränkter Schwankung sind, ist dann und nur dann vorhanden, wenn $\psi(x)$ und $\chi(x)$ im Intervall (a, b) keine gemeinsamen Unstetigkeitsstellen besitzen.

Wenn $\psi(x)$ und $\chi(x)$ eine gemeinsame Unstetigkeitsstelle haben, ist das Integral offenbar nicht vorhanden. Seien also jetzt $\psi(x)$ und $\chi(x)$ ohne gemeinsame Unstetigkeitsstellen. Für den Beweis bedeutet es keinen Verlust an Allgemeinheit, wenn man $\psi(x)$ und $\chi(x)$ als monoton wachsende Funktionen voraussetzt, denn die Darstellung einer Funktion beschränkter Schwankung $\psi(x)$ als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$, $\psi(x) = \psi_1(x) - \psi_2(x)$, läßt sich so ein-

richten, daß $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ keine anderen Unstetigkeitsstellen besitzen als $\psi(x)$. Zerlegt man $\psi(x)$ und $\chi(x)$ in dieser Weise, so ist in der Zerlegung

$$\int_a^b \psi\, d\chi = \int_a^b \psi_1\, d\chi_1 - \int_a^b \psi_2\, d\chi_1 - \int_a^b \psi_1\, d\chi_2 + \int_a^b \psi_2\, d\chi_2$$

das Integral links vorhanden, wenn es die Integrale rechts sind, in jedem dieser Integrale haben aber die beiden vorkommenden monoton wachsenden Funktionen keine gemeinsamen Sprungstellen.

Eine Teilung T des Intervalls (a, b) sei gegeben durch

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

ξ_ν sei ein beliebiger Wert zwischen x_ν und $x_{\nu+1}$,

$$x_\nu \leqq \xi_\nu \leqq x_{\nu+1}.$$

Es ist

$$U_T = \sum_{\nu=0}^{n-1} \psi(x_\nu)\{\chi(x_{\nu+1}) - \chi(x_\nu)\} \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} \psi(\xi_\nu)\{\chi(x_{\nu+1}) - \chi(x_\nu)\}$$

$$\leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} \psi(x_{\nu+1})\{\chi(x_{\nu+1}) - \chi(x_\nu)\} = O_T.$$

Sind T_1 und T_2 irgend zwei Teilungen, T_3 eine Teilung, welche alle Teilpunkte von T_1 und T_2 enthält, so ist

$$U_{T_1} \leqq U_{T_3} \leqq O_{T_3} \leqq O_{T_2},$$

daher ist die obere Grenze der U_T nicht größer als die untere Grenze der O_T. Es bleibt zu zeigen, daß

$$O_T - U_T = \sum_{\nu=0}^{n-1} \{\psi(x_{\nu+1}) - \psi(x_\nu)\}\{\chi(x_{\nu+1}) - \chi(x_\nu)\}$$

beliebig klein ausfällt, wenn alle Differenzen $x_{\nu+1} - x_\nu$ genügend klein sind.

Die Zahl $\varepsilon > 0$ sei gegeben. Ich fasse zunächst die endlich vielen Sprungstellen $y_1, \ldots, y_m$ von $\psi(x)$ ins Auge, an denen die Höhe des Sprunges $\geqq \varepsilon$ ist. Da nach Voraussetzung $y_1, \ldots, y_m$ Stetigkeitsstellen von $\chi(x)$ sind, läßt sich $\delta > 0$ so wählen, daß

$$\sum_{i=1}^{m} \{\chi(y_i + \delta) - \chi(y_i - \delta)\} < \varepsilon.$$

Ferner gibt es eine Zahl $\delta' > 0$ von folgender Beschaffenheit: Für alle Teilintervalle $(x_\nu, x_{\nu+1})$ von (a, b), deren Längen nicht größer als δ' sind, und von denen keines ganz in einem der Intervalle

$$(y_i - \delta,\ y_i + \delta) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

liegt, ist

$$\psi(x_{\nu+1}) - \psi(x_\nu) < \varepsilon.$$

enn wäre das nicht der Fall, so würde es eine Folge von Intervallen eben, deren Längen gegen Null streben und in denen die Schwankung on $\psi(x)$ nicht unter ε herabsinkt. Dann gäbe es auch einen Wert y, so aß in jeder Umgebung von y ein Intervall der Folge liegt und y wäre emnach mit einem der Werte $y_1, \ldots, y_m$ identisch, während nach Konruktion der Intervallfolge

$$|y_i - y| \geqq \delta \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

t. Damit wird erkannt: Für alle Teilungen T, deren Intervallängen $\leqq \delta'$ nd, ist

$$O_T - U_T \leqq \varepsilon\{\chi(b) - \chi(a)\} + \{\psi(b) - \psi(a)\} \sum_{i=1}^{m} \{\chi(y_i + \delta) - \chi(y_i - \delta)\}$$
$$\leqq \varepsilon\{\chi(b) - \chi(a) + \psi(b) - \psi(a)\},$$

. z. b. w.

Beweis des Theorems IV. Für

$$u > 0, \quad 0 < \lambda < \Lambda, \quad \lambda = v_0 < v_1 < \ldots < v_n = \Lambda$$

st

$$\sum_{q=1}^{up} c_{pq} = \sum_{q=1}^{up} \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha} b_{\alpha q} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha} \sum_{q=1}^{up} b_{\alpha q} = \sum_{\alpha=1}^{\lambda p} + \sum_{\alpha=\lambda p+1}^{\Lambda p} + \sum_{\alpha=\Lambda p+1}^{\infty}.$$

$$\sum_{\alpha=\lambda p+1}^{\Lambda p} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\alpha=v_\nu p+1}^{v_{\nu+1} p} a_{p\alpha} \sum_{q=1}^{\frac{up}{\alpha}\alpha} b_{\alpha q}$$

$$\left\{ \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\alpha=v_\nu p+1}^{v_{\nu+1} p} a_{p\alpha} \sum_{q=1}^{\frac{u}{v_\nu}\alpha} b_{\alpha q} \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\operatorname*{Max}_{v_\nu p < \alpha \leqq v_{\nu+1} p} \sum_{q=1}^{\frac{u}{v_\nu}\alpha} b_{\alpha q} \right) \sum_{\alpha=v_\nu p+1}^{v_{\nu+1} p} a_{p\alpha} = O_T(p) \right.$$

$$\left\{ \geqq \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\alpha=v_\nu p+1}^{v_{\nu+1} p} a_{p\alpha} \sum_{q=1}^{\frac{u}{v_{\nu+1}}\alpha} b_{\alpha q} \geqq \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\operatorname*{Min}_{v_\nu p < \alpha \leqq v_{\nu+1} p} \sum_{q=1}^{\frac{u}{v_{\nu+1}}\alpha} b_{\alpha q} \right) \sum_{\alpha=v_\nu p+1}^{v_{\nu+1} p} a_{p\alpha} = U_T(p). \right.$$

Nachdem $u > 0$ vorläufig ganz beliebig gewählt ist, sollen die Werte $= v_0, v_1, \ldots, v_n = \Lambda$ so bestimmt werden, daß $v_0, v_1, \ldots, v_n$ Stetigkeitstellen von χ_A, $\frac{u}{v_0}, \frac{u}{v_1}, \ldots, \frac{u}{v_n}$ Stetigkeitsstellen von χ_B sind. Dies ist auch ann noch möglich, wenn gefordert wird, daß λ und Λ unterhalb bzw. berhalb vorgegebener Schranken liegen und alle Differenzen $v_{\nu+1} - v_\nu$ nterhalb einer vorgegebenen Schranke liegen. Dann wird

$$\lim_{p \to \infty} O_T(p) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \chi_B\left(\frac{u}{v_\nu}\right) \{\chi_A(v_{\nu+1}) - \chi_A(v_\nu)\} = O_T,$$

$$\lim_{p \to \infty} U_T(p) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \chi_B\left(\frac{u}{v_{\nu+1}}\right) \{\chi_A(v_{\nu+1}) - \chi_A(v_\nu)\} = U_T.$$

Für alle genügend feinen Teilungen $T(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ unterscheiden sich die Größen O_T und U_T beliebig wenig von dem Stieltjesschen Integral

$$\int_{\lambda}^{\Lambda} \chi_B\left(\frac{u}{v}\right) d\chi_A(v), \tag{25}$$

falls dies Integral vorhanden ist. Das ist aber nach Satz 7 tatsächlich der Fall, wenn man für u gewisse, höchstens abzählbar viele Werte vermeidet, nämlich diejenigen Werte u, für welche $\chi_A(v)$ und die ebenfalls monotone Funktion $\chi_B\left(\frac{u}{v}\right)$ von v eine gemeinsame Sprungstelle $v > 0$ haben. — Als Funktion von λ und ebenfalls von Λ ist das Integral (25) monoton, und daraus folgt wegen der Beschränktheit von χ_A und χ_B, daß

$$\lim_{\lambda \to 0,\, \Lambda \to \infty} \int_{\lambda}^{\Lambda} \chi_B\left(\frac{u}{v}\right) d\chi_A(v) = \int_0^{\infty} \chi_B\left(\frac{u}{v}\right) d\chi_A(v)$$

als ein endlicher Wert vorhanden ist. Damit ist gezeigt, daß

$$\lim_{\lambda \to 0,\, \Lambda \to \infty} \lim_{p \to \infty} \sum_{\alpha=\lambda p+1}^{\Lambda p} = \int_0^{\infty} \chi_B\left(\frac{u}{v}\right) d\chi_A(v),$$

wo natürlich u, λ, Λ den genannten Einschränkungen unterliegen. Um den Beweis des Theorems zu vollenden, sind nur noch die abgespaltenen Summen passend abzuschätzen. Es ist

$$\sum_{\alpha=1}^{\lambda p} \leqq M_B \sum_{\alpha=1}^{\lambda p} a_{p\alpha} = M_B\{\chi_A(\lambda) + \varepsilon_p\},$$

daher, weil A nullstetig vorausgesetzt ist,

$$\lim_{\lambda \to 0} \overline{\lim_{p \to \infty}} \sum_{\alpha=1}^{\lambda p} = 0;$$

$$\sum_{\alpha=\Lambda p+1}^{\infty} \leqq M_B \sum_{\alpha=\Lambda p+1}^{\infty} a_{p\alpha} = M_B\{\chi_A(\infty) - \chi_A(\Lambda) + \varepsilon_p\},$$

daher

$$\lim_{\Lambda \to \infty} \overline{\lim_{p \to \infty}} \sum_{\alpha=\Lambda p+1}^{\infty} = 0.$$

Wenn endlich außer A auch B nullstetig gestrahlt ist, so ist die Nullstetigkeit von AB aus (25) abzulesen.

II. Abschnitt.

Sehr langsam oszillierende, langsam oszillierende und langsam abfallende Folgen.

§ 8.

Die sehr langsam oszillierenden Folgen.

Der Tauber sche Satz und die „Tauberian Theorems" gelten unter gewissen *zusätzlichen Voraussetzungen* über die Ausgangsfolgen $s_1, s_2, \ldots$. In diesem Abschnitt will ich diese Zusatzbedingungen in eine solche Form bringen und so erweitern, daß sie den gestrahlten Mittelbildungen angemessen sind. Zugleich werde ich einige allgemeine Sätze, auf die sich der III. Abschnitt stützt, entwickeln.

Definition 9. *Eine Folge $s_1, s_2, \ldots$ (mit beliebigen Gliedern) heißt sehr langsam oszillierend, wenn sie folgende Eigenschaft hat: Stets, wenn $q = q(p)$ mit $p = 1, 2, \ldots$ eine solche Indexfolge durchläuft, daß $\frac{q}{p}$ gegen irgendeinen endlichen positiven Grenzwert strebt, dann strebt*

$$s_q - s_p \to 0.$$

Setzt man

$$s_n = c_0 + c_1 + \ldots + c_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

so bilden die s_n z. B. in folgenden drei Fällen eine sehr langsam oszillierende Folge:

1. Wenn die c_n der Tauberschen Bedingung[29])

$$n c_n \to 0$$

genügen (Voraussetzung des $o - A \to K$-Satzes). Denn ist etwa $q > p$, so ist

$$|s_q - s_p| = |c_p + c_{p+1} + \ldots + c_{q-1}| \leqq (q-p)\,\mathrm{Max}\,(|c_p|, \ldots |c_{q-1}|),$$

und wenn

$$|c_n| = \mathrm{Max}\,(|c_p|, \ldots |c_{q-1}|),$$

so folgt

$$|s_q - s_p| \leqq \left(\frac{q}{p} - 1\right) n\,|c_n| \to 0,$$

sobald $\frac{q}{p}$ gegen einen endlichen positiven Grenzwert strebt.

2. Wenn die c_n der (schwächeren) Tauberschen Bedingung[29])

26)
$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \nu c_\nu \to 0$$

[29]) A. Tauber, Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen, Monatsh. f. Math. u. Phys. 8 (1897), S. 273–277.

genügen. Es ist nämlich zunächst

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\nu c_\nu = \frac{n-1}{n}\,\frac{1}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu c_\nu + c_n,$$

so daß, wenn (26) erfüllt ist,

$$s_{n+1} - s_n = c_n \to 0.$$

Wenn gesetzt wird

$$T_n = \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n},$$

so ist ferner

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\nu c_\nu = s_{n+1} - T_n,$$

demnach

$$s_{n+1} - T_n = (s_{n+1} - s_n) + (s_n - T_n) \to 0, \qquad s_n - T_n \to 0.$$

Der Satz 11, der schon hier seinen Platz finden könnte, sagt nun gerade das Behauptete aus.

3. Wenn die c_n der Fejérschen Bedingung[30])

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n|^2 \text{ konvergent}$$

genügen. In der Tat liefert die Schwarzsche Ungleichung

$$|s_q - s_p|^2 = \Big|\sum_{\nu=p}^{q-1} c_\nu\Big|^2 \leqq \sum_{\nu=p}^{q-1}\frac{1}{\nu}\cdot\sum_{\nu=p}^{q-1}\nu\,|c_\nu|^2 \to 0,$$

sobald $\frac{q}{p}$ gegen einen endlichen positiven Grenzwert strebt.

Satz 8. *Wenn $s_1, s_2, \ldots$ eine sehr langsam oszillierende Folge ist, und $0 < \lambda < \Lambda$, dann ist*

$$\lim_{p\to\infty}\ \operatorname*{Max}_{\lambda p \leqq q \leqq \Lambda p} |s_q - s_p| = 0.$$

Denn sonst wäre für gewisse Indexpaare p_ν, q_ν

$$\varliminf_{\nu\to\infty} |s_{q_\nu} - s_{p_\nu}| > 0, \qquad \lambda p_\nu \leqq q_\nu \leqq \Lambda p_\nu,$$

und aus p_ν, q_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ läßt sich eine Teilfolge von Indexpaaren p'_ν, q'_ν auswählen, so daß $\frac{q'_\nu}{p'_\nu} \to u$, $\lambda \leqq u \leqq \Lambda$. Das steht im Widerspruch zur Definition 9.

---

[30]) L. Fejér, Über die Konvergenz der Potenzreihe an der Konvergenzgrenze. Schwarz-Festschrift (1914), S. 42–53.

Satz 9. *Zu jeder sehr langsam oszillierenden Folge* $s_1, s_2, \ldots$ *gibt eine Konstante* K *von der Beschaffenheit, daß*

$$|s_q - s_p| \leqq K \lg \frac{q}{p}$$

für alle $p = 1, 2, \ldots$ *und alle* $q \geqq ep$.[31])

Zum Beweise werde die natürliche Zahl ν so bestimmt, daß

$$e^\nu p \leqq q < e^{\nu+1} p.$$

s ist

$$\begin{aligned} |s_q - s_p| &\leqq |s_q - s_{e^\nu p}| + |s_{e^\nu p} - s_{e^{\nu-1} p}| + \ldots + |s_{ep} - s_p| \\ &\leqq (\nu+1) \operatorname{Max} (|s_q - s_{e^\nu p}|, |s_{e^\nu p} - s_{e^{\nu-1} p}|, \ldots, |s_{ep} - s_p|). \end{aligned}$$

ach Satz 8 strebt dieser Maximalwert gegen Null mit $p \to \infty$, deswegen

27) $$\frac{|s_q - s_p|}{\lg \frac{q}{p}} \leqq \frac{\nu+1}{\nu} \frac{|s_q - s_p|}{\nu+1} \to 0$$

it $p \to \infty$, gleichmäßig für alle $q \geqq ep$; das ist mehr als behauptet war. erner ist nach (27)

$$\overline{\lim_{q \to \infty}} \frac{|s_q - s_p|}{\lg \frac{q}{p}} = K_p \to 0,$$

$$\lim_{q \to \infty} \frac{s_q}{\lg q} = 0.$$

as ist der

Satz 10. *Wenn* $s_1, s_2, \ldots$ *eine sehr langsam oszillierende Folge ist,* *strebt*

$$\frac{s_p}{\lg p} \to 0.$$

Theorem V. *Wenn die Matrix* (a_{pq}) *gestrahlt ist und außerdem en Bedingungen*

1) $$\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} = 1 \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

2) $$\frac{p}{q} \sum_{\nu=1}^{q} a_{p\nu} \leqq C \qquad (p, q = 1, 2, \ldots)$$

enügt, dann führt (a_{pq}) *jede sehr sehr langsam oszillierende Folge* $s_1, s_2, \ldots$ *n eine sehr langsam oszillierende Folge* $t_1, t_2, \ldots$ *über, und zwar strebt*

$$t_p - s_p \to 0.$$

---

[31]) e = Basis der natürlichen Logarithmen. Es kommt nur darauf an, daß e ein ster Wert > 1 ist.

Offenbar ist der erste Teil der Behauptung eine Folge des zweiten, so daß nur dieser zu beweisen ist. Nach Voraussetzung 1) ist

$$t_p - s_p = \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}(s_q - s_p).$$

Wenn $0 < \lambda \leqq \frac{1}{e}$, $e \leqq \Lambda$, so kann man schreiben

$$|t_p - s_p| \leqq \sum_{q=1}^{\lambda p} a_{pq}|s_q - s_p| + \sum_{q=\lambda p+1}^{\Lambda p} a_{pq}|s_q - s_p| + \sum_{q=\Lambda p+1}^{\infty} a_{pq}|s_q - s_p|.$$

Nach Satz 8 ist

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{q=\lambda p+1}^{\Lambda p} a_{pq}|s_q - s_p| = 0. \tag{28}$$

Für die dritte Summe gilt nach Satz 9

$$\sum_{q=\Lambda p+1}^{\infty} a_{pq}|s_q - s_p| \leqq K \sum_{q=\Lambda p+1}^{\infty} a_{pq}\frac{q}{p}.$$

Die Folge $1, 2, \ldots, q, \ldots$ ist eine Vergleichsfolge, a_{pq} eine gestrahlte Matrix. Der Beweisgang des Theorems I liefert somit

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \overline{\lim_{p\to\infty}} \sum_{q=\Lambda p+1}^{\infty} a_{pq}\frac{q}{p} = 0,$$

und weil K nicht von $\Lambda \geqq e$ abhängt, ist auch

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \overline{\lim_{p\to\infty}} \sum_{q=\Lambda p+1}^{\infty} a_{pq}|s_q - s_p| = 0. \tag{29}$$

Für die erste Summe gilt, ebenfalls nach Satz 9,

$$\sum_{q=1}^{\lambda p} a_{pq}|s_q - s_p| \leqq K \sum_{q=1}^{\lambda p} a_{pq} \lg\frac{p}{q},$$

K unabhängig von $\lambda \leqq \frac{1}{e}$. Partielle Summation ergibt

$$\sum_{q=1}^{\lambda p} a_{pq} \lg\frac{p}{q} = \lg\frac{p}{[\lambda p]+1} \cdot \sum_{\nu=1}^{[\lambda p]} a_{p\nu} + \sum_{q=1}^{\lambda p} \lg\frac{q+1}{q} \sum_{\nu=1}^{q} a_{p\nu}$$

$$\leqq \frac{[\lambda p]}{p} \lg\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{p}{[\lambda p]} \sum_{\nu=1}^{\lambda p} a_{p\nu} + \frac{[\lambda p]}{p} \frac{1}{[\lambda p]} \sum_{q=1}^{\lambda p} \frac{p}{q} \sum_{\nu=1}^{q} a_{p\nu},$$

und nach Voraussetzung 2)

$$\sum_{q=1}^{\lambda p} a_{pq} \lg\frac{p}{q} \leqq \lambda \lg\frac{1}{\lambda} \cdot C + \lambda C,$$

aher

$$\lim_{\lambda \to 0} \overline{\lim_{p \to \infty}} \sum_{q=1}^{\lambda p} a_{pq} |s_q - s_p| = 0. \tag{30}$$

Die Beziehungen (28), (29) und (30) zusammen ergeben gerade

$$t_p - s_p \to 0.$$

Insbesondere genügt die Matrix der *arithmetischen Mittel* den Voraussetzungen des Theorems V, und in diesem Falle läßt sich umgekehrt aus $t_p - s_p \to 0$ der Schluß ziehen, daß s_p sehr langsam oszilliert:

Satz 11. *Wenn* $T_1, T_2, \ldots$ *die Folge der arithmetischen Mittel von* $s_1, s_2, \ldots$ *ist,*

$$T_p = \frac{s_1 + \ldots + s_p}{p},$$

und wenn

$$T_p - s_p \to 0,$$

dann ist $s_1, s_2, \ldots$ *eine sehr langsam oszillierende Folge.*

Es genügt, die Behauptung für reelle $s_1, s_2, \ldots$ zu beweisen. Werde angenommen, der Satz sei falsch. Dann gibt es eine Folge $s_1, s_2, \ldots$, für die $T_p - s_p \to 0$ strebt, und zu der sich $u > 0$ und $\delta > 0$ so wählen lassen, daß für unendlich viele Indexpaare p, q

$$|s_q - s_p| \geqq \delta$$

ist, während

$$\frac{q}{p} \to u.$$

Es bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, $q > p$ anzunehmen. Von den beiden möglichen Fällen: Für unendlich viele Indexpaare p, q ist

$$s_q - s_p \geqq \delta, \tag{31}$$

oder für unendlich viele Indexpaare p, q ist

$$s_q - s_p \leqq -\delta,$$

möge etwa der erste vorliegen. Indem man q nötigenfalls durch einen kleineren Index $q > p$ ersetzt, kann man erreichen, daß

$$s_{p+1} \leqq s_q, \; s_{p+2} \leqq s_q, \ldots, s_{q-1} \leqq s_q,$$

und (31) immer noch erfüllt bleibt. Dann ist

$$\frac{s_{p+1} + \ldots + s_q}{q - p} \leqq s_q. \tag{32}$$

Allerdings strebt dann nicht mehr notwendig $\frac{q}{p} \to u$, es ist aber doch

$$1 < \frac{q}{p} \leqq U, \tag{33}$$

wo U eine passende Konstante. Man erhält nun nach (31) und (32)

$$\frac{q}{p}(T_q - s_q) - (T_p - s_p) = -\frac{q}{p}s_q + s_p + \frac{s_{p+1} + \ldots + s_q}{q-p}\cdot\frac{q-p}{p}$$
$$\leqq -\frac{q}{p}s_q + s_p + s_q\left(\frac{q}{p} - 1\right) = s_p - s_q \leqq -\delta,$$

während nach Voraussetzung und wegen (33)

$$\lim_{p\to\infty}\left\{\frac{q}{p}(T_q - s_q) - (T_p - s_p)\right\} = 0.$$

§ 9.

Die langsam oszillierenden Folgen.

Definition 10. *Eine Folge $s_1, s_2, \ldots$ heißt langsam oszillierend, wenn sie folgende Eigenschaft hat: Stets, wenn $q = q(p)$ mit $p = 1, 2, \ldots$ eine solche Indexfolge durchläuft, daß*

$$\frac{q}{p} \to 1,$$

dann strebt

$$s_q - s_p \to 0.$$

Hiernach ist jede sehr langsam oszillierende Folge gewiß auch langsam oszillierend. Setzt man wieder

$$s_n = c_0 + \ldots + c_{n-1},$$

und genügen die c_n der Littlewoodschen Bedingung[32])

$$n|c_n| \leqq C,$$

so bilden die s_n eine langsam oszillierende Folge. Denn man hat ebenso wie im vorigen Paragraphen

$$|s_q - s_p| = |c_p + \ldots + c_{q-1}| \leqq (q-p)\,\mathrm{Max}(|c_p|, \ldots, |c_{q-1}|)$$
$$\leqq \frac{q-p}{p}n|c_n| \leqq \left(\frac{q}{p} - 1\right)C \to 0 \quad \text{mit} \quad \frac{q}{p} \to 1.$$

Für langsam oszillierende Folgen gelten Analoga zu den Sätzen 8, 9 und 10, und zwar

Satz 12. *Wenn $s_1, s_2, \ldots$ eine langsam oszillierende Folge ist, und $0 < \lambda < \Lambda$, dann gibt es eine Konstante K, so daß*

$$|s_q - s_p| \leqq K$$

für $p = 1, 2, \ldots$ und $\lambda p \leqq q \leqq \Lambda p$. — Bedeutet

$$K(\lambda, \Lambda) = \overline{\lim_{\substack{p\to\infty \\ \lambda p \leqq q \leqq \Lambda p}}} |s_q - s_p|,$$

[32]) J. E. Littlewood, The Converse of Abel's Theorem on Power Series. Proc. of the London Math. Soc., Ser. 2, 9 (1911), p. 434—448.

o ist

$$\lim_{\lambda \to 1,\ \Lambda \to 1} K(\lambda, \Lambda) = 0.$$

Zum Beweise kann $q > p$ angenommen werden. Wenn sich *nicht* ür jedes Paar λ, Λ eine passende Konstante K angeben läßt, so würde ür eine gewisse Folge von Indexpaaren p_ν, q_ν gelten

$$|s_{q_\nu} - s_{p_\nu}| \to \infty, \qquad \frac{q_\nu}{p_\nu} \to u\,(>1). \tag{34}$$

Es sei n irgendeine natürliche Zahl, und es werde gesetzt

$$r_{\nu i}^{(n)} = q_\nu \left(\frac{p_\nu}{q_\nu}\right)^{\frac{i}{n}} \qquad (i = 0, \ldots, n).$$

Wegen

$$|s_{q_\nu} - s_{p_\nu}| \leqq |s_{r_{\nu 0}^{(n)}} - s_{r_{\nu 1}^{(n)}}| + |s_{r_{\nu 1}^{(n)}} - s_{r_{\nu 2}^{(n)}}| + \ldots + |s_{r_{\nu, n-1}^{(n)}} - s_{r_{\nu n}^{(n)}}|$$

und (34) gilt für mindestens ein i

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} |s_{r_{\nu, i-1}^{(n)}} - s_{r_{\nu i}^{(n)}}| = \infty.$$

Man kann daher die Indexpaare $p_\nu^{(n)}$, $q_\nu^{(n)}$ so bestimmen, daß

$$\lim_{\nu \to \infty} |s_{q_\nu^{(n)}} - s_{p_\nu^{(n)}}| = \infty, \qquad \lim_{\nu \to \infty} \frac{q_\nu^{(n)}}{p_\nu^{(n)}} = \sqrt[n]{u}.$$

Schließlich kann man durch Zuordnung eines geeigneten ν zu jedem n erreichen, daß für die Indexpaare $p_\nu^{(n)} = p_n$, $q_\nu^{(n)} = q_n$ erfüllt ist

$$\lim_{n \to \infty} |s_{q_n} - s_{p_n}| = \infty, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{q_n}{p_n} = 1,$$

im Widerspruch damit, daß $s_1, s_2, \ldots$ eine langsam oszillierende Folge ist. — Die weitere Behauptung $K(\lambda, \Lambda) \to 0$ mit $\lambda \to 1$, $\Lambda \to 1$ ist evident.

Satz 13. *Zu jeder langsam oszillierenden Folge $s_1, s_2, \ldots$ gibt es eine Konstante K von der Beschaffenheit, daß*

$$|s_q - s_p| \leqq K \lg \frac{q}{p}$$

für alle $p = 1, 2, \ldots$ und alle $q \geqq ep$.

Der Beweis ist wörtlich derselbe wie der des Satzes 9. Aus Satz 13 folgt, indem man dort $p = 1$ setzt, der

Satz 14. *Zu jeder langsam oszillierenden Folge $s_1, s_2, \ldots$ gibt es eine Konstante K von der Beschaffenheit, daß*

$$\frac{|s_p|}{\lg(p+1)} \leqq K \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Ein Blick auf den Beweis des Theorems V und die Sätze 12, 13, 14 lehrt: Wenn die Matrix (a_{pq}) den Bedingungen des Theorems V genügt, und wenn $s_1, s_2, \ldots$ eine *langsam oszillierende* Folge ist, dann sind die Differenzen $t_p - s_p$ beschränkt. Ich werde nun — zum ersten Male in diesem Abschnitt — von der *wesentlichen* Eigenschaft (Def. 3, 2)) der gestrahlten Matrizen Gebrauch machen, um das vollständige Analogon des Theorems V zu beweisen, nämlich das

Theorem VI. *Wenn die Matrix (a_{pq}) den Bedingungen des Theorems V genügt, so führt sie jede langsam oszillierende Folge $s_1, s_2, \ldots$ in eine langsam oszillierende Folge $t_1, t_2, \ldots$ über. Ferner gibt es eine Konstante C, so daß*

$$|t_p - s_p| < C \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Beim Beweise kann ich mich auf reelle $s_1, s_2, \ldots$ beschränken. Die Existenz einer passenden Konstante C wurde soeben festgestellt; der andere Teil der Behauptung, $t_q - t_p \to 0$ mit $\frac{q}{p} = \frac{q(p)}{p} \to 1$, ist offenbar gleichbedeutend mit

$$(t_q - s_q) - (t_p - s_p) \to 0.$$

Es ist

$$|(t_q - s_q) - (t_p - s_p)| \leqq \sum_{\alpha=1}^{\lambda p} a_{q\alpha} |s_\alpha - s_q| + \sum_{\alpha=1}^{\lambda p} a_{p\alpha} |s_\alpha - s_p|$$
$$+ \Big| \sum_{\alpha=\lambda q+1}^{\Lambda q} a_{q\alpha} (s_\alpha - s_q) - \sum_{\alpha=\lambda p+1}^{\Lambda p} a_{p\alpha} (s_\alpha - s_p) \Big|$$
$$+ \sum_{\alpha=\Lambda q+1}^{\infty} a_{q\alpha} |s_\alpha - s_q| + \sum_{\alpha=\Lambda p+1}^{\infty} a_{p\alpha} |s_\alpha - s_p|.$$

Hier gelten für die ersten beiden und letzten beiden Summen mit Rücksicht auf den Satz 13 dieselben Abschätzungen wie beim Beweise des Theorems V. Es bleibt zu zeigen

$$A_p = \sum_{\alpha=\lambda q+1}^{\Lambda q} a_{q\alpha} (s_\alpha - s_q) - \sum_{\alpha=\lambda p+1}^{\Lambda p} a_{p\alpha} (s_\alpha - s_p) \to 0$$

mit $p \to \infty$. Es kann vorausgesetzt werden, daß λ und Λ Stetigkeitsstellen der Belegungsfunktion $\chi(u)$ von (a_{pq}) sind. Nach Wahl von $\delta > 0$ mögen die Stetigkeitsstellen $u_0, \ldots, u_n$ so bestimmt werden, daß $\lambda = u_0 < \ldots < u_n = \Lambda$, und alle Differenzen $u_{\nu+1} - u_\nu$ unterhalb δ gelegen sind. Es ist dann

$$A_p = \sum_{\nu=0}^{n-1} \Big(\sum_{\alpha=u_\nu q+1}^{u_{\nu+1}q} a_{q\alpha}(s_\alpha - s_q) - \sum_{\alpha=u_\nu p+1}^{u_{\nu+1}p} a_{p\alpha}(s_\alpha - s_p) \Big)$$

$$\leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} \big(\{\chi(u_{\nu+1}) - \chi(u_\nu) + \varepsilon_{q\nu}\} \operatorname*{Max}_{u_\nu q < \alpha \leqq u_{\nu+1}q} (s_\alpha - s_q) - \{\chi(u_{\nu+1}) - \chi(u_\nu) + \varepsilon_{p\nu}\} \operatorname*{Min}_{u_\nu p < \alpha \leqq u_{\nu+1}p} (s_\alpha - s_p) \big)$$

$$\leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} \{\chi(u_{\nu+1}) - \chi(u_\nu)\} \{\operatorname{Max} - \operatorname{Min}\} + \varepsilon_p \Big(\operatorname*{Max}_{\lambda q < \alpha \leqq \Lambda q} |s_\alpha - s_q| + \operatorname*{Max}_{\lambda p < \alpha \leqq \Lambda p} |s_\alpha - s_p| \Big)$$

$$\leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} \{\}\{\} + 2\varepsilon_p K(\lambda, \Lambda).$$

Mit $q^{(\nu)}$ will ich den Index α bezeichnen, für den der Maximalwert $\operatorname*{Max}_{u_\nu q < \alpha \leqq u_{\nu+1}q} (s_\alpha - s_q)$ angenommen wird, entsprechend mit $p^{(\nu)}$ den Index α, für den der Minimalwert $\operatorname*{Min}_{u_\nu p < \alpha \leqq u_{\nu+1}p} (s_\alpha - s_p)$ angenommen wird. Dann ist

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \{\}\{\} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \{\chi(u_{\nu+1}) - \chi(u_\nu)\} \{(s_{q^{(\nu)}} - s_{p^{(\nu)}}) - (s_q - s_p)\},$$

$$\Big| \sum_{\nu=0}^{n-1} \{\}\{\} \Big| \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} \{\chi(u_{\nu+1}) - \chi(u_\nu)\} |s_{q^{(\nu)}} - s_{p^{(\nu)}}| + |s_q - s_p| \{\chi(\Lambda) - \chi(\lambda)\}.$$

Für $q^{(\nu)}$ und $p^{(\nu)}$ gilt

$$\frac{u_\nu q}{u_{\nu+1} p} \leqq \frac{q^{(\nu)}}{p^{(\nu)}} \leqq \frac{u_{\nu+1} q}{u_\nu p};$$

wegen

$$\frac{\lambda}{\lambda+\delta} \leqq \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} \leqq 1 + \frac{\delta}{\lambda}, \quad \frac{q}{p} \to 1,$$

kann man $\delta > 0$ so wählen, daß die Quotienten $\frac{q^{(\nu)}}{p^{(\nu)}}$ für alle genügend großen p sich um weniger als eine vorgegebene Größe von 1 unterscheiden, so daß nach Satz 12

$$\overline{\lim_{p \to \infty}} |s_{q^{(\nu)}} - s_{p^{(\nu)}}| \leqq k(\delta), \qquad k(\delta) \to 0 \text{ mit } \delta \to 0.$$

Jetzt ist (wegen $\chi(\Lambda) - \chi(\lambda) \leqq \chi(\infty) = 1$)

$$\overline{\lim_{p \to \infty}} \Big| \sum_{\nu=0}^{n-1} \{\}\{\} \Big| \leqq k(\delta),$$

$$\overline{\lim} A_p \leqq 0.$$

Auf dieselbe Weise folgt

$$\underline{\lim} A_p \geqq 0,$$

daher

$$A_p \to 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

§ 10.

Die langsam abfallenden Folgen. Normal gestrahlte Mittelbildungen.

Definition 11. *Eine reelle Folge* $s_1, s_2, \ldots$ *heißt langsam abfallend, wenn sie folgende Eigenschaft hat: Stets, wenn* $q = q(p)$ *mit* $p = 1, 2, \ldots$ *eine solche Indexfolge durchläuft, daß*

$$1) \quad q \geqq p, \qquad 2) \quad \frac{q}{p} \to 1,$$

dann ist

$$\lim_{p \to \infty} (s_q - s_p) \geqq 0.$$

Man überzeugt sich ebenso wie in den entsprechenden früheren Fällen, daß die $s_n = c_0 + \ldots + c_{n-1}$ eine langsam abfallende Folge bilden, wenn die c_n der Landau-Hardy-Littlewoodschen Bedingung[33])

$$n c_n \geqq -C$$

genügen.

Die langsam abfallenden Folgen werden mit den langsam oszillierenden in engere Verbindung gebracht durch den evidenten

Satz 15. *Eine reelle Folge* $s_1, s_2, \ldots$ *ist dann und nur dann langsam abfallend, wenn sie sich als Summe einer monoton wachsenden Folge* $r_1, r_2, \ldots$ *und einer (reellen) langsam oszillierenden Folge* $s_1^*, s_2^*, \ldots$ *darstellen läßt:*

$$s_p = r_p + s_p^*.$$

Die monotone Komponente einer langsam abfallenden Folge kann natürlich immer *positiv* gewählt werden. Das Wachstum dieser Komponente ist keiner Einschränkung unterworfen; wenn (a_{pq}) nicht in jeder Zeile nur endlich viele von Null verschiedene Elemente besitzt (nicht zeilenfinit ist), kann man daher nach Belieben solche langsam abfallenden Folgen $s_1, s_2, \ldots$ konstruieren, für welche die Transformierten $t_1, t_2, \ldots$ nicht alle existieren. Ich will im folgenden annehmen, daß alle vorkommenden $t_1, t_2, \ldots$ existieren, ohne dafür Bedingungen anzugeben oder das auch nur besonders zu bemerken. — Auf Grund des Satzes 15 erkennt man sofort das Analogon zu einer Teilbehauptung des Theorems VI, den

Satz 16. *Die Matrix* (a_{pq}) *genüge den Bedingungen des Theorems* V, *und außerdem sei*

$$a_{pq} = 0 \quad \text{für} \quad q > p, \quad p = 1, 2, \ldots .$$

Die Folge $s_1, s_2, \ldots$ *sei langsam abfallend. Dann gibt es eine Konstante* C, *so daß*

$$t_p - s_p < C \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

---

[33]) Hardy-Littlewood, Proc. of the London Math. Soc., Ser. 2, **13** (1913), S. 174–191 (188).

ieser Satz wird sich im III. Abschnitt als nützlich erweisen, und zwar
dem besonderen Falle, daß (a_{pq}) die Matrix der arithmetischen
ittel ist.

Damit eine Matrix (a_{pq}) jede langsam abfallende Folge in eine
ngsam abfallende überführt, reicht es nicht aus, daß sie den Bedingungen
es Theorems V genügt. Die Richtung, in der die ergänzende Bedingung
u suchen ist, wird durch den Satz 15 gewiesen: (a_{pq}) muß *monotonie-
haltend* sein; das soll heißen, sie muß die Eigenschaft haben, jede nicht-
egative monoton wachsende Folge in eine ebensolche überzuführen. Ich
ill diese Forderung nicht einfach den früheren Bedingungen hinzufügen,
ndern die Kennzeichen für die Erhaltung der Monotonie explizit an-
eben. Dazu beweise ich den

Satz 17. *Eine Matrix* (a_{pq}) *mit nichtnegativen Koeffizienten ist
ann und nur dann monotonieerhaltend, wenn sie der Bedingung*

$$\sum_{\alpha=q}^{\infty}(a_{p+1,\alpha}-a_{p\alpha})\geqq 0 \qquad (p,q=1,2,\ldots)$$

enügt.

Der Satz gilt natürlich nur, soweit er Sinn hat, d. h. für solche
olgen $s_1, s_2, \ldots$, für welche die Transformierten $t_1, t_2, \ldots$ existieren.
ndererseits mache ich die fast selbstverständliche Voraussetzung, daß
enigstens für konvergente Folgen die Existenz ihrer Transformierten
eststeht.

1. Wenn die Matrix (a_{pq}) monotonieerhaltend ist, führt sie insbesondere
ie Folge $s_1=0, \ldots, s_q=0, s_{q+1}=1, s_{q+2}=1, \ldots$ in eine monotone
ber. Das ergibt

$$t_{p+1}-t_p=\sum_{\alpha=1}^{\infty}(a_{p+1,\alpha}-a_{p\alpha})s_\alpha=\sum_{\alpha=q}^{\infty}(a_{p+1,\alpha}-a_{p\alpha})\geqq 0,$$

ir $p=1,2,\ldots$, und weil q ganz beliebig gewählt werden kann, so
enügt (a_{pq}) der Bedingung des Satzes.

2. Um nachzuweisen, daß die Bedingung des Satzes die Erhaltung
er Monotonie zur Folge hat, nehme ich zunächst an, daß (a_{pq}) zeilen-
nit ist. Sei also (bei vorläufig festem p) q so beschaffen, daß

$$a_{p,q+\nu}=0, \quad a_{p+1,q+\nu}=0 \qquad (\nu=1,2,\ldots).$$

Die Folge $s_1, s_2, \ldots$ sei nichtnegativ und monoton wachsend, und zur
Abkürzung

$$\Delta a_{pq}=a_{p+1,q}-a_{pq}.$$

Aus

$$\sum_{\alpha=\beta}^{\infty}\Delta a_{p\alpha}=\sum_{\alpha=\beta}^{q}\Delta a_{p\alpha}\geqq 0 \qquad (\beta=1,\ldots q)$$

folgt

$$\begin{aligned}
t_{p+1} - t_p &= \Delta a_{p1} s_1 + \ldots + \Delta a_{p,q-1} s_{q-1} + \Delta a_{pq} s_q \\
&= \Delta a_{p1} s_1 + \ldots + (\Delta a_{p,q-1} + \Delta a_{pq}) s_{q-1} + \Delta a_{pq} (s_q - s_{q-1}) \\
&\geqq \Delta a_{p1} s_1 + \ldots + (\Delta a_{p,q-1} + \Delta a_{pq}) s_{q-1} \\
&= \Delta a_{p1} s_1 + \ldots + (\Delta a_{p,q-2} + \Delta a_{p,q-1} + \Delta a_{pq}) s_{q-2} \\
&\qquad + (\Delta a_{p,q-1} + \Delta a_{pq})(s_{q-1} - s_{q-2}) \\
&\geqq \Delta a_{p1} s_1 + \ldots + (\Delta a_{p,q-2} + \Delta a_{p,q-1} + \Delta a_{pq}) s_{q-2} \\
&= \ldots \\
&\geqq (\Delta a_{p1} + \ldots + \Delta a_{pq}) s_1 \geqq 0.
\end{aligned}$$

Damit ist für den Fall der Zeilenfinitheit von (a_{pq}) der Satz bewiesen. Allgemein kann man bei festem p nach Wahl von $\varepsilon > 0$ einen Index q so bestimmen, daß

$$\sum_{\alpha=q}^{\infty} a_{p\alpha} s_\alpha \leqq \varepsilon.$$

Man hat dann

$$\begin{aligned}
t_{p+1} - t_p &= \sum_{\alpha=1}^{q-1} \Delta a_{p\alpha} s_\alpha + \sum_{\alpha=q}^{\infty} a_{p+1,\alpha} s_\alpha - \sum_{\alpha=q}^{\infty} a_{p\alpha} s_\alpha \\
&\geqq \sum_{\alpha=1}^{q-1} \Delta a_{p\alpha} s_\alpha + s_q \sum_{\alpha=q}^{\infty} a_{p+1,\alpha} - \varepsilon \\
&\geqq \sum_{\alpha=1}^{q-1} \Delta a_{p\alpha} s_\alpha + s_q \sum_{\alpha=q}^{\infty} \Delta a_{p\alpha} - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ich setze jetzt

$$a'_{p\alpha} = \begin{cases} a_{p\alpha} & \text{für} \quad \alpha < q \\ \sum\limits_{\nu=q}^{\infty} a_{p\nu} & \text{für} \quad \alpha = q \\ 0 & \text{für} \quad \alpha > q, \end{cases}$$

$a'_{p+1,\alpha}$ entsprechend, und

$$t'_p = \sum_{\alpha=1}^{q} a'_{p\alpha} s_\alpha, \qquad t'_{p+1} = \sum_{\alpha=1}^{q} a'_{p+1,\alpha} s_\alpha.$$

Dann ist

$$\sum_{\alpha=\beta}^{q} \Delta a'_{p\alpha} \geqq 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, q),$$

daher nach dem schon Bewiesenen

$$t'_{p+1} - t'_p \geqq 0,$$

$$t_{p+1} - t_p \geqq \Sigma \Delta a'_{p\alpha} s_\alpha - \varepsilon + t'_{p+1} - t'_p - \varepsilon \geqq -\varepsilon,$$

$$t_{p+1} - t_p \geqq 0.$$

Definition 12. *Eine Matrix (a_{pq}) heißt normal gestrahlt, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:*

1) (a_{pq}) *ist gestrahlt,*

2) $$\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} = 1 \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

3) $$\frac{p}{q} \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha} \leqq M \qquad (p, q = 1, 2, \ldots),$$

4) $$\sum_{\alpha=q}^{\infty} (a_{p+1,\alpha} - a_{p\alpha}) \geqq 0 \qquad (p, q = 1, 2, \ldots).$$

Natürlich gelten alle bisher gewonnenen Sätze über Matrizen insondere für normal gestrahlte Matrizen. Darüber hinaus gilt das

Theorem VII. *Eine normal gestrahlte Matrix* (a_{pq}) *führt jede ngsam abfallende Folge* $s_1, s_2, \ldots$ *in eine langsam abfallende Folge* $t_2, \ldots$ *über.*

Denn ist $s_\alpha = r_\alpha + s_\alpha^*$ eine Zerlegung von s_α gemäß Satz 15, so ist gen 4), Def. 12, für $q \geqq p$

$$t_q(s_\alpha) - t_p(s_\alpha) = t_q(r_\alpha) - t_p(r_\alpha) + t_q(s_\alpha^*) - t_p(s_\alpha^*) \geqq t_q(s_\alpha^*) - t_p(s_\alpha^*),$$

ch Theorem VI

$$t_q(s_\alpha^*) - t_p(s_\alpha^*) \to 0 \quad \text{mit} \quad \frac{q}{p} \to 1,$$

her

$$\varliminf_{p \to \infty} (t_q - t_p) \geqq 0, \quad \text{wenn} \quad q \geqq p \quad \text{und} \quad \frac{q}{p} = \frac{q(p)}{p} \to 1.$$

§ 11.

rweiterung des Begriffs der sehr langsam oszillierenden, der langsam oszillierenden und der langsam abfallenden Folgen.

Die bisherigen Entwicklungen haben gezeigt, daß die gestrahlten ittelbildungen ihrem Wesen nach sowohl den gestrahlten Folgen als ch den im II. Abschnitt betrachteten Folgen im großen und ganzen ngemessen sind. Jedoch in Anbetracht dessen, daß die im I. Abschnitt trachteten Folgen mit denen des II. Abschnitts recht wenig miteinander tun haben — allenfalls besteht zwischen ihnen eine gewisse Analogie —, scheint es nicht genügend motiviert, den Begriff der normal gestrahlten atrizen zu bilden, die doch gerade so definiert wurden, daß die Behaupngen des I. *und* des II. Abschnitts für sie gelten. Auf der einen Seite t die Bedingung 1), Def. 3, übertrieben scharf, wenn man nur die Sätze es II. Abschnitts in Betracht zieht; auf der anderen Seite sind für die ültigkeit der Sätze des I. Abschnitts die Bedingungen 2) bis 4), Def. 12, gar überflüssig. Diese Erwägung legt es nahe, die gestrahlten, oder was esentlich dasselbe bedeutet, die Vergleichsfolgen mit den sehr langsam

oszillierenden, langsam oszillierenden und langsam abfallenden Folgen zu kombinieren.

Definition 9a. *Die Folge $s_1, s_2, \ldots$ heißt relativ zu der Vergleichsfolge $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ (mit dem Exponenten σ) sehr langsam oszillierend, wenn sie folgende Eigenschaft hat: Stets, wenn $q = q(p)$ mit $p = 1, 2, \ldots$ eine solche Indexfolge durchläuft, daß $\frac{q}{p}$ gegen irgendeinen endlichen positiven Grenzwert u strebt, dann strebt*

$$\frac{s_q - s_p}{\sigma_p} \to k(u^\sigma - 1) \qquad (k \text{ beliebig fest}).$$

Wenn $s_1, s_2, \ldots$ eine gestrahlte Folge ist, $\frac{s_p}{\sigma_p} \to 1$, dann ist $s_1, s_2, \ldots$ eine relativ zu $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ sehr langsam oszillierende Folge.

Definition 10a. *Die Folge $s_1, s_2, \ldots$ heißt relativ zu der Vergleichsfolge $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ langsam oszillierend, wenn sie folgende Eigenschaft hat: Stets, wenn $q = q(p)$ mit $p = 1, 2, \ldots$ eine solche Indexfolge durchläuft, daß $\frac{q}{p} \to 1$, dann strebt*

$$\frac{s_q - s_p}{\sigma_p} \to 0.$$

Definition 11a. *Die reelle Folge $s_1, s_2, \ldots$ heißt relativ zu der Vergleichsfolge $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ langsam abfallend, wenn sie folgende Eigenschaft hat: Stets, wenn $q = q(q)$ mit $p = 1, 2, \ldots$ eine solche Indexfolge durchläuft, daß*

$$1) \quad q \geqq p, \qquad 2) \quad \frac{q}{p} \to 1,$$

dann ist

$$\lim_{p \to \infty} \frac{s_q - s_p}{\sigma_p} \geqq 0.$$

Nimmt man in den Definitionen 9a, 10a, 11a die Vergleichsfolge $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ *konvergent* an, so erhält man genau die Definitionen 9, 10, 11. Für die soeben definierten Folgen gelten Theoreme, die Verquickungen der Theoreme V, VI, VII mit dem Theorem I sind. Ich führe diese Theoreme hier ohne Beweis an. Die Beweise gelingen zwar nicht durch Zurückführung auf die früher bewiesenen analogen Sätze, sie ergeben sich aber durch einfache Kombination der Beweise der genannten Theoreme, und sind garnicht zu verfehlen.

Theorem Va. *Eine normal gestrahlte Matrix (a_{pq}) führt jede relativ zu $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ sehr langsam oszillierende Folge $s_1, s_2, \ldots$ in eine relativ zu $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ sehr langsam oszillierende Folge $t_1, t_2, \ldots$ über, und zwar strebt*

$$\frac{t_p - s_p}{\sigma_p} \to k(\mu(\sigma) - 1),$$

bei bedeutet σ den Exponenten von $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, $\mu(\sigma)$ die Momentfunktion n (a_{pq}), k die Konstante gemäß Definition 9a.

Satz 11a. *Wenn $T_1, T_2, \ldots$ die Folge der arithmetischen Mittel n $s_1, s_2, \ldots$ ist, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ eine Vergleichsfolge mit dem Exponenten σ, d wenn*

$$\frac{T_p - s_p}{\sigma_p} \to k(\mu(\sigma) - 1) = k\left(\frac{1}{\sigma+1} - 1\right),$$

nn ist $s_1, s_2, \ldots$ eine relativ zu $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ sehr langsam oszillierende olge:

$$\frac{s_q - s_p}{\sigma_p} \to k(u^\sigma - 1).$$

Theorem VIa. *Eine normal gestrahlte Matrix (a_{pq}) führt jede lativ zu $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ langsam oszillierende Folge $s_1, s_2, \ldots$ in eine lativ zu $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ langsam oszillierende Folge $t_1, t_2, \ldots$ über. Ferner bt es eine Konstante C, so daß*

$$\frac{|t_p - s_p|}{\sigma_p} < C.$$

Theorem VIIa. *Eine normal gestrahlte Matrix (a_{pq}) führt jede lativ zu $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ langsam abfallende Folge $s_1, s_2, \ldots$ in eine relativ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ langsam abfallende Folge über.*

Satz 16a. *Wenn die Matrix (a_{pq}) normal gestrahlt ist, und außerdem*

$$a_{pq} = 0 \quad \text{für} \quad q > p, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

, $s_2, \ldots$ eine relativ zu $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ langsam abfallende Folge, dann gibt eine Konstante C, so daß

$$\frac{t_p - s_p}{\sigma_p} < C.$$

Es bedarf kaum eines Hinweises, daß alle bisher gegebenen Definiionen und Sätze über Folgen und Matrizen sich sinngemäß auf *Funkionen* und *kontinuierliche* Matrizen übertragen lassen. Es steht nichts n Wege, an Stelle gewisser Folgen $s_1, s_2, \ldots$ und ihrer Transformierten $= \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} s_q$ gewisse Funktionen $f(x)$ und ihre Transformierten

$$g(x) = \int_0^{\infty} k(x, y)\, d f(y)$$

betrachten, und hierfür eine genau entsprechende Theorie zu entwickeln. h gehe darauf nicht ein. Doch werden im III. Abschnitt Matrizen mit ntinuierlichem Zeilenindex, aber diskontinuierlichem Spaltenindex aufeten (vgl. § 13). Solche Matrizen führen Folgen in Funktionen über. an übersieht sofort, daß sich in diesem Falle an den früheren Defini-

tionen, Sätzen und Theoremen überhaupt nichts Wesentliches ändert. Ich hebe eine Definition und ein Theorem hervor.

Definition 11b. *Die für $x > 0$ definierte eindeutige reelle Funktion $s(x)$ heißt relativ zu der Vergleichsfunktion $\sigma(x)$ langsam abfallend, wenn sie folgende Eigenschaft hat: Bedeutet $y = y(x)$ irgendeine eindeutige reelle Funktion von x, welche den Bedingungen*

$$1)\quad y \geqq x, \qquad 2)\quad \frac{y}{x} \to 1 \quad \text{mit} \quad x \to \infty$$

genügt, dann ist

$$\lim_{x \to \infty} \frac{s(y) - s(x)}{\sigma(x)} \geqq 0.$$

Theorem VIIb. *Es sei $\sigma(x)$ eine Vergleichsfunktion. Eine normal gestrahlte, hinsichtlich p kontinuierliche Matrix führt dann jede relativ zu der Vergleichsfolge $\sigma_1 = \sigma(1)$, $\sigma_2 = \sigma(2)$, ... langsam abfallende Folge $s_1, s_2, \ldots$ in eine relativ zu $\sigma(x)$ langsam abfallende Funktion $t(x)$ über.*

III. Abschnitt.

Anwendungen auf Mittelungsumkehrsätze.

§ 12.

Ein allgemeiner Hilfssatz.

Den Beweisen und Verschärfungen einiger Sätze von Hardy und Littlewood schicke ich einen Hilfssatz voraus, der noch nicht an eine spezielle Mittelbildung gebunden ist.

Hilfssatz 3. *Sei $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ eine Vergleichsfolge, $s_1, s_2, \ldots$ eine positive monoton wachsende Folge, oder auch nur eine positive relativ zu $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ langsam abfallende Folge. Seien ferner die Matrizen*

$$(a_{pq}) \quad \text{und} \quad \left(a_{pq} \frac{s_q}{\sigma_p}\right)$$

gestrahlt. Dann ist $s_1, s_2, \ldots$ eine gestrahlte Folge, und zwar strebt $\frac{s}{\sigma}$ gegen einen endlichen und von Null verschiedenen Grenzwert.

Der Einfachheit halber führe ich den Beweis nur unter der Voraussetzung, daß $s_1, s_2, \ldots$ eine positive *monotone* Folge ist. Die uneingeschränkte Gültigkeit des Hilfssatzes ist auf dieselbe Weise einzusehen auf Grund eines Satzes über relativ langsam abfallende Folgen, der von der Natur des Satzes 12, § 9 ist.

Die Belegungsfunktion $\chi(u)$ von (a_{pq}) besitzt nach 2), Def. 3, wenigstens eine *positive* Wachstumstelle u_0, d. h. $\chi(u_0 + \varepsilon) - \chi(u_0 - \varepsilon) > 0$ für

des $\varepsilon > 0$. Angenommen, die Behauptung treffe nicht zu. Es sind dann ei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall:

$$\frac{s_p}{\sigma_p} \to 0.$$

ir die Belegungsfunktion $\chi^*(u)$ von $(a_{pq}^*) = \left(a_{pq}\frac{s_q}{\sigma_p}\right)$ folgt, wenn $\Lambda > u_0$ ne Stetigkeitsstelle von χ und χ^* ist,

$$\chi^*(\Lambda) \leqq \chi(\Lambda) \cdot \lim_{p\to\infty} \frac{s_{\Lambda p}}{\sigma_p} = 0;$$

as besagt, $\chi^*(u)$ verschwindet identisch.

2. Fall:

$$\frac{s_p}{\sigma_p} \to \infty.$$

Wenn λ eine Stetigkeitsstelle von χ und χ^* ist, und $0 < \lambda < u_0$, so ist

$$\chi^*(\infty) \geqq \chi^*(\infty) - \chi^*(\lambda) \geqq \{\chi(\infty) - \chi(\lambda)\} \lim_{p\to\infty} \frac{s_{\lambda p}}{\sigma_p} = \infty,$$

ährend doch die Belegungsfunktion einer gestrahlten Matrix beschränkt ist.

3. Fall: Es gibt zwei Zahlen a und $b > a$ derart, daß unendlich oft $\frac{s_p}{\sigma_p} \leqq a$, und ebenfalls unendlich oft $\frac{s_p}{\sigma_p} \geqq b$.

Die Werte v_0, v_1, v_2 seien so gewählt, daß

$$0 < v_0 < u_0 < v_1 < v_2,$$

erner soll v_0 Stetigkeitsstelle von χ und χ^*, v_1 und v_2 Stetigkeitsstellen on χ sein. Wenn u zwischen v_1 und v_2 liegt, $v_1 \leqq u \leqq v_2$, ist

$$\sum_{q=1}^{up} a_{pq}^* \leqq \sum_{q=1}^{v_0 p} a_{pq}^* + \sum_{q=v_0 p+1}^{v_2 p} a_{pq}\frac{s_q}{\sigma_p}.$$

Wegen $[v_2(p+1)] - [v_2 p] \leqq [v_2] + 1$ läßt sich für wenigstens ein $\nu \geqq 0$ er Index p immer wieder so wählen, daß $\frac{s_{v_2 p+\nu}}{\sigma_{v_2 p+\nu}} \leqq a$. Es kommt dann

$$\sum_{q=1}^{up} a_{pq}^* \leqq \sum_{q=1}^{v_0 p} a_{pq}^* + \sum_{q=v_0 p+1}^{v_2 p} a_{pq}\frac{s_{v_2 p+\nu}}{\sigma_{v_2 p+\nu}}\frac{\sigma_{v_2 p+\nu}}{\sigma_p},$$

nd wegen $\lim_{p\to\infty} \frac{v_2 p+\nu}{p} = v_2$, wenn σ der Exponent von $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ ist:

35) $$\lim_{p\to\infty} \sum_{q=1}^{up} a_{pq}^* \leqq \chi^*(v_0) + v_2^{\sigma}\{\chi(v_2) - \chi(v_0)\}a.$$

Die Abschätzung nach unten ist ähnlich durchzuführen:

$$\sum_{q=1}^{up} a_{pq}^* \geqq \sum_{q=1}^{v_0 p} a_{pq}^* + \sum_{q=v_0 p+1}^{v_1 p} a_{pq} \frac{s_q}{\sigma_p},$$

und für wenigstens ein $\nu \geqq 0$ läßt sich p immer wieder so wählen, daß $\frac{s_{v_0 p-\nu}}{\sigma_{v_0 p-\nu}} \geqq b$. Es kommt dann

$$\sum_{q=1}^{up} a_{pq}^* \geqq \sum_{q=1}^{v_0 p} a_{pq}^* + \sum_{q=v_0 p+1}^{v_1 p} a_{pq} \frac{s_{v_0 p-\nu}}{\sigma_{v_0 p-\nu}} \frac{\sigma_{v_0 p-\nu}}{\sigma_p},$$

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \sum_{q=1}^{up} a_{pq}^* \geqq \chi^*(v_0) + v_0^\sigma \{\chi(v_1) - \chi(v_0)\} b. \tag{36}$$

Die Abschätzungen (35) und (36) gelten für alle u des Intervalls $v_1 \leqq u \leqq v_2$. Es würde im Widerspruch zur Voraussetzung stehen, wenn für alle u dieses Intervalls

$$\underline{\lim_{p\to\infty}} \sum_{q=1}^{up} a_{pq}^* < \overline{\lim_{p\to\infty}} \sum_{q=1}^{up} a_{pq}^*$$

wäre. Dieser Widerspruch läßt sich aber bei passender Wahl von v_0, v_1, v_2 tatsächlich herstellen: Weil u_0 eine Wachstumstelle von χ ist, und $v_0 < u_0 < v_2$, ist $\chi(v_2) - \chi(v_0) > 0$, und ebenfalls ist $b > 0$. Nach (35) und (36) genügt es daher zu zeigen, daß sich

$$\frac{v_2^\sigma \{\chi(v_2) - \chi(v_0)\} a}{v_0^\sigma \{\chi(v_1) - \chi(v_0)\} b} < 1,$$

oder bei gegebenem $\varepsilon > 0$

$$\left(\frac{v_2}{v_0}\right)^\sigma \frac{\chi(v_2) - \chi(v_0)}{\chi(v_1) - \chi(v_0)} < 1 + \varepsilon$$

erreichen läßt. Das gelingt, wenn man zunächst — bei gleichzeitiger Erfüllung aller schon gestellten Anforderungen an v_0, v_1, v_2 — v_0 und v_2 so nahe beieinander wählt, daß $\left(\frac{v_2}{v_0}\right)^\sigma$ genügend wenig größer als 1 ist. Läßt man dann v_1 an v_2 heranrücken, so strebt, weil v_2 Stetigkeitsstelle von χ ist, $\chi(v_1)$ gegen $\chi(v_2)$, daher kann man auch $\frac{\chi(v_2) - \chi(v_0)}{\chi(v_1) - \chi(v_0)}$ beliebig nahe an 1 heranbringen.

§ 13.

Die Abelsche Mittelbildung. Der Satz von Tauber.

Die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

sei im Einheitskreise konvergent. Wenn mit $z = x \to 1$ längs der reellen Achse $\lim_{x \to 1} \Sigma c_n x^n = s$ vorhanden ist, so sagt man, die Reihe Σc_n sei durch das Abelsche Verfahren summierbar, in Zeichen: $A\text{-}\Sigma c_n = s$, oder die Folge $s_n = c_0 + \ldots + c_{n-1}$ sei durch das Abelsche Verfahren limitierbar, A-limitierbar, in Zeichen

$$A\text{-}\lim s_n = s \quad \left(= \lim_{x \to 1} (1-x) \Sigma s_n x^{n-1}\right).$$

Für die meisten Schritte zum Beweise der *Umkehrsätze* des A-Verfahrens kommt es nicht darauf an, daß die Annäherung von $x \to 1$ kontinuierlich vor sich geht. Ich will eine bestimmte diskontinuierliche Annäherung bevorzugen[34]), indem ich setze

$$x_p = 1 - \frac{1}{p} \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Dann ist

$$\mathfrak{P}(x_p) = t_p = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{q-1} s_q,$$

und hierdurch wird eine Mittelbildung

$$(a_{pq}) = \left(\frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{q-1}\right)$$

definiert, welche die Folge $s_1, s_2, \ldots$ in die Folge $t_1, t_2, \ldots$ überführt. Diese Mittelbildung (Matrix) möge die *Abelsche* genannt werden, $t_1, t_2, \ldots$ heiße die Folge der *Abelschen Mittel* von $s_1, s_2, \ldots$.

Satz 18. *Die Abelsche Matrix ist normal gestrahlt. Ihre Belegungsfunktion ist*

$$\chi(u) = 1 - e^{-u},$$

ihre Momentfunktion

$$\mu(\sigma) = \int_0^{\infty} u^{\sigma} d(1 - e^{-u}) = \Gamma(\sigma + 1).$$

Die Verifikation dieses Satzes ist mühelos. — Damit gelten alle für normal gestrahlte Mittelbildungen gewonnenen Theoreme und Sätze ohne weiteres auch für die Abelsche Mittelbildung. Als ersten *Umkehrsatz* — wenigstens der Form nach — hat man sofort das

Theorem VIII. *Es sei $s_1, s_2, \ldots$ eine relativ zu $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ (mit dem Exponenten σ) sehr langsam oszillierende Folge, $t_1, t_2, \ldots$ die Folge der Abelschen Mittel von $s_1, s_2, \ldots$. Aus*

$$\frac{t_p}{\sigma_p} \to k\,\mu(\sigma) \quad \textit{folgt dann} \quad \frac{s_p}{\sigma_p} \to k.$$

[34]) Vgl. Tauber l. c. (Fußnote 2).

In der Tat strebt nach Theorem Va $\frac{t_p - s_p}{\sigma_p} \to k(\mu(\sigma) - 1)$, mit $\frac{t_p}{\sigma_p} \to k\mu(\sigma)$, daher $\frac{s_p}{\sigma_p} \to k$. — Auf Grund der Bemerkungen im Anschluß an die Definition der sehr langsam oszillierenden Folgen umfaßt das Theorem VIII die Sätze von Tauber und Fejér.

In den folgenden Paragraphen werde ich p als kontinuierliche Variable auffassen. Trotzdem schreibe ich unbedenklich $t_p = \Sigma a_{pq} s_q$, nenne aber dann die Funktion t_p die *A-Transformierte* von $s_1, s_2, \ldots$. Die hinsichtlich p kontinuierliche Matrix $\left(\frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{q-1}\right)$ ist ebenfalls normal gestrahlt. Übrigens ist die Einführung des kontinuierlichen Zeilenindex ziemlich belanglos; die Theoreme IX, X und XI gelten auch dann noch — nur der Beweis des Theorems XI bereitet mehr Mühe —, wenn man dort unter t_p nicht die A-Transformierte, sondern die Folge der Abelschen Mittel versteht.

§ 14.

Zwei Hilfssätze über das A-Verfahren.

Ich wende mich nunmehr zu den „Tauberian Theorems" für Potenzreihen. Zum Beweise dieser Sätze, die wesentlich tiefer liegen als der Taubersche Satz, benutze ich zwei Hilfssätze, die auf das engste mit den Besonderheiten des Abelschen Verfahrens verknüpft sind. Die Hilfssätze 4 und 5 sind nicht grundsätzlich neu; nach einiger Umformung und Spezialisierung erkennt man in ihnen die Sätze wieder, die für die Herren Hardy und Littlewood den Ausgangspunkt zum Beweise ihrer Umkehrsätze bildeten. Der Kunstgriff des Beweises geht auf Landau zurück.

Hilfssatz 4. *Es sei σ_p eine Vergleichsfunktion mit dem Exponenten σ, die Folge $s_1, s_2, \ldots$ sei relativ zu $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ langsam abfallend. Es bedeute $t_p(s_q)$ die A-Transformierte der Folge $s_1, s_2, \ldots$, $t_p(q\,s_q)$ die A-Transformierte der Folge $s_1, 2s_2, 3s_3, \ldots$. Aus*

$$\frac{t_p(s_q)}{\sigma_p} \to k\,\Gamma(\sigma + 1) \qquad (k \gtrless 0)$$

folgt dann

$$\frac{t_p(q\,s_q)}{p\,\sigma_p} \to k\,\Gamma(\sigma + 2).$$

Zum Beweise setze ich $t_p' = \frac{d}{dp}(p\,t_p)$, also

$$t_p' = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q-1}{p^2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{q-2} s_q.$$

Die Matrix

$$(a'_{pq}) = \left(\frac{q-1}{p^2}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{q-2}\right),$$

welche die Folge $s_1, s_2, \ldots$ in die Funktion t'_p überführt, ist normal gestrahlt, wovon man sich mühelos überzeugt. Daher ist t'_p eine relativ zu σ_p langsam abfallende Funktion (Theorem VIIb). Jedem Wert $p > 0$ werde ein q so zugeordnet, daß $\frac{q}{p} \to 1+\delta$ mit $p \to \infty$ $(\delta > 0)$. Nachträglich soll $\delta \to 0$ streben. In Analogie zu Satz 12 hat man für genügend großes p und alle x des Intervalls $p \leqq x \leqq q$

$$\frac{t'_x - t'_p}{\sigma_p} \geqq -\varepsilon, \qquad \varepsilon = \varepsilon(\delta) \to 0 \quad \text{mit} \quad \delta \to 0.$$

Das ergibt

$$\frac{t'_p}{\sigma_p} \leqq \frac{t'_x}{\sigma_p} + \varepsilon,$$

$$\frac{t'_p}{\sigma_p} \leqq \frac{1}{(q-p)\sigma_p}\int_p^q t'_x\,dx + \varepsilon = \frac{q t_q - p t_p}{(q-p)\sigma_p} + \varepsilon = \frac{\frac{q}{p}}{\frac{q}{p}-1}\frac{\sigma_q}{\sigma_p}\frac{t_q}{\sigma_q} - \frac{1}{\frac{q}{p}-1}\frac{t_p}{\sigma_p} + \varepsilon,$$

$$\overline{\lim}\,\frac{t'_p}{\sigma_p} \leqq \frac{1+\delta}{\delta}(1+\delta)^\sigma k\,\Gamma(\sigma+1) - \frac{1}{\delta}k\,\Gamma(\sigma+1) + \varepsilon = k\frac{(1+\delta)^\sigma - 1}{\delta}\Gamma(\sigma+1) + \varepsilon,$$

$$\overline{\lim}\,\frac{t'_p}{\sigma_p} \leqq k\,\Gamma(\sigma+2).$$

Andererseits

$$\frac{t'_q - t'_x}{\sigma_x} \geqq -\varepsilon, \qquad (p \leqq x \leqq q),$$

wegen $\sigma_x \leqq \sigma_q$ um so mehr

$$\frac{t'_q - t'_x}{\sigma_q} \geqq -\varepsilon.$$

Das ergibt

$$\frac{t'_q}{\sigma_q} \geqq \frac{t'_x}{\sigma_q} - \varepsilon,$$

$$\frac{t'_q}{\sigma_q} \geqq \frac{1}{(q-p)\sigma_q}\int_p^q t'_x\,dx - \varepsilon = \frac{q t_q - p t_p}{(q-p)\sigma_q} - \varepsilon = \frac{\frac{q}{p}}{\frac{q}{p}-1}\frac{t_q}{\sigma_q} - \frac{1}{\frac{q}{p}-1}\frac{\sigma_p}{\sigma_q}\frac{t_p}{\sigma_p} - \varepsilon,$$

$$\underline{\lim}\,\frac{t'_q}{\sigma_q} \geqq \frac{1+\delta}{\delta}k\,\Gamma(\sigma+1) - \frac{1}{\delta}\frac{1}{(1+\delta)^\sigma}k\Gamma(\sigma+1) - \varepsilon$$

$$= \frac{k}{(1+\delta)^\sigma}\frac{(1+\delta)^\sigma - 1}{\delta}\Gamma(\sigma+1) - \varepsilon,$$

$$\underline{\lim}\,\frac{t'_q}{\sigma_q} \geqq k\,\Gamma(\sigma+2),$$

und damit

$$\lim \frac{t'_p}{\sigma_p} = k\,\Gamma(\sigma+2).$$

Nun ist

$$\frac{t'_p(s_q)}{\sigma_p} = \frac{t_p((q-1)\,s_q)}{p\sigma_p} = \frac{t_p(qs_q)}{p\sigma_p} - \frac{1}{p}\,\frac{t_p(s_q)}{\sigma_p},$$

und weil $\frac{1}{p}\,\frac{t_p(s_q)}{\sigma_p} \to 0$ strebt, so folgt

$$\frac{t_p(qs_q)}{p\sigma_p} \to k\,\Gamma(\sigma+2).$$

Hilfssatz 5. *Es seien die Voraussetzungen des vorigen Hilfssatzes erfüllt, darüber hinaus sei $s_1, s_2, \ldots$ eine positive Folge. Aus*

$$\frac{t_p(s_q)}{\sigma_q} \to k\,\Gamma(\sigma+1)$$

folgt dann

$$\frac{t_p(q^\nu s_q)}{p^\nu \sigma_p} \to k\,\Gamma(\sigma+\nu+1)$$

für jedes ganzzahlige $\nu \geqq 0$.

Der Hilfssatz besagt für $\nu = 0$ nichts Neues, und ist schon bewiesen für $\nu = 1$. Er werde als richtig angenommen für ein beliebiges ν. Wegen

$$\frac{t_p(q^{\nu+1}s_q)}{p^{\nu+1}\sigma_p} = \frac{t_p(q\cdot q^\nu s_q)}{p\cdot p^\nu \sigma_p}$$

folgt seine Richtigkeit dann für $\nu+1$, falls die Folge $p^\nu s_p$ relativ zu $p^\nu\sigma_p$ langsam abfällt. Das trifft aber tatsächlich zu, denn es ist

$$\frac{q^\nu s_q - p^\nu s_p}{p^\nu \sigma_p} = \left(\frac{q}{p}\right)^\nu \frac{s_q - s_p}{\sigma_p} + \left(\left(\frac{q}{p}\right)^\nu - 1\right)\frac{s_p}{\sigma_p} \geqq \left(\frac{q}{p}\right)^\nu \frac{s_q - s_p}{\sigma_p},$$

weil die s_p positiv sind.

§ 15.

Umkehrsätze für das A-Verfahren.

Theorem IX. *Wenn die A-Transformierte $t_p = t_p(s_q)$ einer positiven Folge $s_1, s_2, \ldots$ gestrahlt ist mit dem Exponenten σ, etwa*

$$\frac{t_p}{\sigma_p} \to k\,\Gamma(\sigma+1) \qquad (k>0),$$

ferner $s_1, s_2, \ldots$ relativ zu $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ langsam abfallend, dann ist die Folge $s_1, s_2, \ldots$ selber gestrahlt, und zwar strebt

$$\frac{s_p}{\sigma_p} \to k.$$

Dieses Theorem enthält insbesondere den Satz von Hardy-Littlewood über Potenzreihen mit positiven Koeffizienten[35]). — Der Beweis läßt sich nun in wenigen Worten führen.

Nach Hilfssatz 5 strebt

$$\frac{t_p(q^\nu s_q)}{p^\nu \sigma_p} \to k\,\Gamma(\sigma+\nu+1) \qquad (\nu \geqq 0,\ \text{ganzzahlig}). \tag{37}$$

Von nun an kann p wieder als natürliche Zahl angenommen werden. Ich schreibe, wenn (a_{pq}) die Abelsche Matrix bedeutet,

$$\frac{t_p(q^\nu s_q)}{p^\nu \sigma_p} = \frac{\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} \frac{s_q}{\sigma_p} q^\nu}{p^\nu} = \frac{t_p^*(q^\nu)}{p^\nu}.$$

Die Matrix $(a_{pq}^*) = \left(a_{pq}\frac{s_q}{\sigma_p}\right)$ hat also diese Eigenschaften:

1. Ihre Koeffizienten sind nichtnegativ, ihre Zeilensummen beschränkt. Letzteres nach (37) für $\nu = 0$.

2. Zu jedem Exponenten $\nu = 1, 2, \ldots$ gibt es eine gestrahlte Folge $s_1^*, s_2^*, \ldots$, nämlich die Folge $s_1^* = 1^\nu$, $s_2^* = 2^\nu, \ldots$, welche durch die Matrix (a_{pq}^*) so transformiert wird, daß $\frac{t_p^*}{s_p^*}$ gegen einen endlichen positiven Grenzwert strebt, und zwar strebt

$$\frac{t_p^*}{s_p^*} \to k\,\Gamma(\sigma+\nu+1).$$

Nach Theorem IIIa folgt daraus zunächst nur, daß (a_{pq}^*) eine Momentmatrix in $\{1, 2, \ldots\}$ ist. Für $\nu = 0$ erhält man aber gerade die Folge $s_1^* = 1$, $s_2^* = 1, \ldots$; das besagt, wenn $\chi(u)$ irgendeine Belegungsfunktion von (a_{pq}^*) ist,

$$\int_0^\infty u^0\, d\chi(u) = \int_0^\infty d\chi(u) = \lim_{p\to\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}^* = k\,\Gamma(\sigma+1).$$

Daher ist (a_{pq}^*) eine Momentmatrix in $\{0, 1, 2, \ldots\}$ mit der Momentfunktion

$$\mu(\nu) = k\,\Gamma(\sigma+\nu+1).$$

Um schließen zu können, daß (a_{pq}^*) sogar eine *gestrahlte* Matrix ist, bedarf es des Nachweises, daß das zu $\mu(\nu)$ gehörige Stieltjessche Momentenproblem ein *bestimmtes* ist (Satz 5). Das verifiziert man ohne Mühe mit Hilfe des Bestimmtheitskriteriums A, oder noch etwas bequemer mit Hilfe des Bestimmtheitskriteriums B. (Es ist nicht von vornherein sicher, daß das Kriterium B zur Entscheidung führt; aber wenn ein

[35]) Vgl. Fußnote 9.

Momentenproblem im Intervall $(-\infty, +\infty)$ ein bestimmtes ist, so ist es um so mehr ein bestimmtes im Intervall $(0, \infty)$). Man hat nämlich

$$C_n = k^n \cdot \begin{vmatrix} \Gamma(\sigma+1) & \Gamma(\sigma+2) & \dots & \Gamma(\sigma+n) \\ \Gamma(\sigma+2) & \Gamma(\sigma+3) & \dots & \Gamma(\sigma+n+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Gamma(\sigma+n) & \Gamma(\sigma+n+1) & \dots & \Gamma(\sigma+2n-1) \end{vmatrix}$$

$$= k^n \Gamma(\sigma+1) \dots \Gamma(\sigma+n) \begin{vmatrix} 1 & \sigma+1 & (\sigma+2)(\sigma+1) & \dots \\ 1 & \sigma+2 & (\sigma+3)(\sigma+2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \sigma+n & (\sigma+n+1)(\sigma+n) & \dots \end{vmatrix}$$

$$= k^n \Gamma(\sigma+1) \dots \Gamma(\sigma+n) \begin{vmatrix} 1 & \sigma+1 & (\sigma+1)^2 & \dots & (\sigma+1)^{n-1} \\ 1 & \sigma+2 & (\sigma+2)^2 & \dots & (\sigma+2)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \sigma+n & (\sigma+n)^2 & \dots & (\sigma+n)^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= 1!\,2! \dots (n-1)!\, k^n \Gamma(\sigma+1) \dots \Gamma(\sigma+n),$$

und ebenso

$$C_n'' = 1!\,2! \dots (n-3)!\, k^{n-2} \Gamma(\sigma+5)\Gamma(\sigma+6) \dots \Gamma(\sigma+n+2),$$

daraus

$$\frac{C_n}{C_n''} = \frac{(n-2)!\,(n-1)!\, k^2 \Gamma(\sigma+1) \dots \Gamma(\sigma+4)}{\Gamma(\sigma+n+1)\Gamma(\sigma+n+2)} \to 0.$$

Übrigens leistet schon ein älteres, hinreichendes Kriterium von Herrn Perron[36]) das Gewünschte.

(a_{pq}^*) ist also eine gestrahlte Matrix, und damit nach Hilfssatz 3 $s_1, s_2, \dots$ eine gestrahlte Folge. Aus Theorem I folgt nun $\frac{s_p}{\sigma_p} \to k$ w. z. b. w.

Aus Theorem IX folgt unmittelbar ein weiteres, das (für $\sigma_p = 1$) den Satz von Littlewood (O-$A \to K$-Satz) umfaßt:

Theorem *X*. *Es sei σ_p eine Vergleichsfunktion mit dem Exponenten σ, $s_1, s_2, \dots$ eine relativ zu $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ langsam oszillierende Folge, t_p die A-Transformierte von $s_1, s_2, \dots$. Aus*

$$\frac{t_p}{\sigma_p} \to k\,\Gamma(\sigma+1) \qquad (k \text{ beliebig})$$

folgt dann

$$\frac{s_p}{\sigma_p} \to k.$$

[36]) O. Perron, Erweiterung eines Markoffschen Satzes, Math. Ann. **74** (1913) S. 545–554.

Zum Beweise kann die Folge $s_1, s_2, \ldots$ reell vorausgesetzt werden. ach Theorem VIa ist

$$\frac{|t_p - s_p|}{\sigma_p} < C, \qquad \frac{s_p}{\sigma_p} > \frac{t_p}{\sigma_p} - C,$$

aher bei passender Wahl von c

$$s_p + c\sigma_p > 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

ußerdem kann c so gewählt werden, daß $k + c > 0$ ist. Nach Voraus- etzung und Theorem I strebt

$$\frac{t_p(s_q + c\sigma_q)}{\sigma_p} \to (k + c)\,\Gamma(\sigma + 1),$$

ach Theorem IX, weil $s_p + c\sigma_p$ eine positive relativ zu σ_p langsam ab- allende (sogar langsam oszillierende) Folge ist,

$$\frac{s_p + c\sigma_p}{\sigma_p} \to k + c,$$

aher

$$\frac{s_p}{\sigma_p} \to k.$$

Als Abschluß dieser Untersuchung beweise ich einen Satz, der die heoreme IX und X, ferner alle „Tauberian Theorems“ der Herren Hardy und Littlewood über Potenzreihen mit beschränktem Konvergenz- reis enthält, soweit sie nicht über die Größenordnungsskala n^σ (der artialsummen der Koeffizienten) bzw. $\frac{1}{(1-x)^\sigma}$ (von $\mathfrak{P}(x)$ bei $x \to 1$) inausgehen.

Theorem XI. *Es sei σ_p eine Vergleichsfunktion mit dem Expo- onenten σ, $s_1, s_2, \ldots$ eine relativ zu $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ langsam abfallende Folge, $_p$ die A-Transformierte von $s_1, s_2, \ldots$. Aus*

$$\frac{t_p}{\sigma_p} \to k\,\Gamma(\sigma + 1) \qquad (k \gtrless 0)$$

olgt dann

$$\frac{s_p}{\sigma_p} \to k.$$

Nach Hilfssatz 4 strebt

$$\frac{t_p(qs_q)}{p\sigma_p} \to k\,\Gamma(\sigma + 2),$$

nd es ist identisch

$$t_p(s_q) = \frac{t_p(qT_q)}{p},$$

wenn wieder T_p die arithmetischen Mittel der Folge $s_1, s_2, \ldots$ bedeuten. Daher

$$\frac{t_p(qs_q - qT_q)}{p\sigma_p} \to k\,\Gamma(\sigma + 2) - k\,\Gamma(\sigma + 1).$$

Nach Satz 16a ist bei passender Wahl von c

$$s_q - T_q + c\sigma_q > 0,$$

und nach Theorem I

$$\frac{t_p(qs_q - qT_q + cq\sigma_q)}{p\sigma_p} \to k\Gamma(\sigma+2) - k\Gamma(\sigma+1) + c\Gamma(\sigma+2) = k'\Gamma(\sigma+2), \quad k' > 0.$$

Wenn nun schon erkannt ist, daß die Folge $ps_p - pT_p + cp\sigma_p$ relativ zu $p\sigma_p$ langsam abfällt, kann man so weiterschließen: Nach Theorem IX strebt

$$\frac{ps_p - pT_p + cp\sigma_p}{p\sigma_p} \to k' = k\left(1 - \frac{1}{\sigma+1}\right) + c,$$

$$\frac{T_p - s_p}{\sigma_p} \to k\left(\frac{1}{\sigma+1} - 1\right).$$

Nach Satz 11a ist also $s_1, s_2, \ldots$ eine relativ zu $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ *sehr langsam oszillierende* Folge,

$$\frac{s_q - s_p}{\sigma_p} \to k(u^\sigma - 1) \quad \text{mit} \quad \frac{q}{p} \to u.$$

Deswegen nach Theorem Va

$$\frac{t_p(s_q) - s_p}{\sigma_p} \to k(\Gamma(\sigma+1) - 1),$$

und daraus

$$\frac{s_p}{\sigma_p} \to k.$$

Es ist noch der Beweis nachzutragen, daß $ps_p - pT_p + cp\sigma_p$ relativ zu $p\sigma_p$ langsam abfällt. Für $q > p$ ist

$$Q_{pq} = \frac{qs_q - qT_q + cq\sigma_q - (ps_p - pT_p + cp\sigma_p)}{p\sigma_p} \geqq \frac{qs_q - qT_q - (ps_p - pT_p)}{p\sigma_p}$$

$$= \frac{(q-p)s_q - (s_{p+1} + \ldots + s_q) + p(s_q - s_p)}{p\sigma_p}$$

$$= \frac{(s_q - s_{p+1}) + (s_q - s_{p+2}) + \ldots + (s_q - s_q)}{p\sigma_p} + \frac{s_q - s_p}{\sigma_p}.$$

Zu jedem Indexpaar p, q werde n so gewählt, daß

$$s_q - s_n = \operatorname{Min}(s_q - s_{p+1}, \ldots, s_q - s_q).$$

Dann ist

$$Q_{pq} \geqq \frac{q-p}{n} \frac{n\sigma_n}{p\sigma_n} \frac{s_q - s_n}{\sigma_n} + \frac{s_q - s_p}{\sigma_p},$$

$$\underline{\lim}\, Q_{pq} \geqq 0, \text{ wenn } \frac{q}{p} \to 1 \text{ mit } p \to \infty, \quad \text{w. z. b. w.}$$

(Eingegangen am 25. Juli 1924.)

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik werden wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften veröffentlichen, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von K. Orthmann und F. Müller, fortgesetzt von E. Lampe, herausgegeben von L. Lichtenstein. Von Band 47, Jahrgang 1919—1920, sind die Hefte 1 bis 3 erschienen (S. 1—512), die Hefte 4—6 folgen in kurzen Zwischenräumen. Der 48. Band, (Jahrgang 1921/22) befindet sich ebenfalls im Druck, Heft 1 erscheint Ende Januar 1925.

N. Herz, Allgemeine Theorie zentrierter Linsensysteme. Wien. F. Deuticke, IV, 68 S. 8°. (1924.)

H. Driesch, Relativitätstheorie und Philosophie. (Wissen und Wirken, Bd. 14.) Karlsruhe. G. Braun, 52 S. (1924.)

H. Schubert, Mathematische Mußestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. 4. Aufl. Neubearbeitet von F. Fitting. Berlin. W. de Gruyter & Co., 245 S. 8°. (1924.)

W. Reinhardt und N. Mannheimer, Geometrie, Algebra und Infinitesimalrechnung. Zum Gebrauch vorzugsweise in der Prima der Oberrealschulen und verwandter Anstalten umgearbeitet und erweitert von H. Detlefs. Frankfurt a. M. M. Diesterweg, 8°. IX, 414 S. (1924.)

W. Reinhardt, N. Mannheimer und H. Hofmann, Arithmetik und Geometrie zum Gebrauch in der Obersekunda. (Ausg. A. (ür Realanstalten.) Frankfurt a. M. M. Diesterweg, 8°. VI, 209 S. (1924.)

L. Schrutka, Elemente der höheren Mathematik. Für Studierende der technischen und Naturwissenschaften. 3. u. 4. Auflage. Wien. F. Deuticke, Lex. 8°. XXX, 635 S. (1924.)

Soeben erscheint:

Katalog 251: Mathematik (2308 Nrn.)

Zusendung auf Wunsch

Bernh. Liebisch, Leipzig

[8] **Kurprinzstr. 6**

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Lehrbuch der Nomographie auf abbildungsgeometrischer Grundlage. Von Studienrat **H. Schwerdt.** 275 Seiten mit 137 Textabbildungen und 151 angewandten Aufgaben mit Lösungen. 1924. Gebunden 12.90 G.-M.

Soeben erschien:

Antiquariatskatalog Nr. 20

MATHEMATIK

ca. 900 Nummern

Interessenten erhalten den Katalog kostenlos von der

Frommannschen Buchhandlung (Walter Biedermann)

Abtg. Antiquariat

[10] **Jena**

VERLAG L. W. SEIDEL & SOHN, WIEN

Dr. Hermann Rothe
Professor an der Technischen Hochschule in Wien

Vorlesungen über höhere Mathematik

2., verbesserte Auflage — Mit 142 Figuren — In Halbleinenband G.-M. 16.—

Über dieses vortreffliche moderne Lehrbuch schreibt die „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik", 1921:

Es ist dem Verfasser gelungen, die — durch zahlreiche Beispiele unterstützte — **Darstellung selbst für den Ungeübten durchaus verständlich und recht anregend** zu gestalten. Die deutliche Hervorhebung aller Definitionen, Sätze und Formeln und beständige Hinweise auf frühere Stellen des Textes lassen das Buch **auch als Nachschlagewerk für Ingenieure und Naturwissenschaftler recht brauchbar** erscheinen . . . **Die große Klarheit, Anschaulichkeit und Deutlichkeit, mit der er es verstanden hat, den spröden Stoff zu meistern, zeugt jedenfalls von besonderem pädagogischen Geschick und von Verständnis für die Bedürfnisse des Lernenden. Dem Ingenieur, der in die Denkweise der modernen Analysis eindringen und ihre schönen Früchte kennen lernen will, kann kein geeigneterer Weg empfohlen werden als das Rothesche Buch.**

Dr. Hermann Rothe

Einführung in die Tensorrechnung

Mit einem Vorwort von R. Weitzenböck — 180 Seiten Oktav, 1924 — Preis kartoniert G.-M. 5.—

„Dieses Buch, als eine vollständige Darstellung der Tensoralgebra, füllt eine offenbare Lücke auf und bietet die beste Einführung in einen so wichtigen und schwierigen Gegenstand."
(Nature, London.)

Eine Einführung in das Verständnis der Relativitätstheorie.

Dr. Eugenio Bertini
Professor an der Universität in Pisa

Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume

Mit einem Anhang über algebraische Kurven und ihre Singularitäten

Berechtigte deutsche Ausgabe von Dr. **Adalbert Duschek.**

XXIV und 480 Seiten — Gebunden G.-M. 25.—

Die einzige zusammenfassende und systematische Darstellung der Geometrie mehrdimensionaler Räume.

Dr. techn. Alfred Lechner
Professor an der technischen Hochschule in Wien

Enzyklopädie der Mechanik

Ein Lehrbuch für die Studierenden an Technischen Hochschulen und Universitäten

352 Seiten mit 318 Figuren. Großoktav, 1923 — Preis gebunden G.-M. 12.80

Ein neues kurzgefaßtes Lehrbuch für Studium und Praxis. Enthält die Hauptprobleme der gesamten Mechanik und ihre Anwendungen auf Probleme des Maschinenbaues und der Baustatik.

Hartner-Doležal

Hand- und Lehrbuch der niederen Geodäsie

11. Auflage, 1921, Großoktav. I. Band, 1. Teil und I. Band, 2. Teil, 1114 Seiten. II. Band, 584 Seiten
In 3 Halbleinenbänden gebunden G.-M. 54.—

Herr-Tinter

Lehrbuch der sphärischen Astronomie

In ihrer Anwendung auf geographische Ortsbestimmung

644 Seiten, Großoktav, Zweite Auflage. — Preis gebunden G.-M. 24.—

Dr. Emanuel Czuber

Die statistischen Forschungsmethoden

234 Seiten auf holzfreiem Papier mit 35 Figuren im Text, Großoktav, 1921. — Preis gebunden G.-M. 7.50

Hierzu eine Beilage der Verlagsbuchhandlung Franz Deuticke in Wien I sowie eine Beilage des Verlags von R. Oldenbourg in München und Berlin und der Verlagsbuchhandlung Julius Springer in Berlin W 9.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.